НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ
І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

М. В. Негрей, К. Л. Тужик

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

«Центр учбової літератури»
Київ – 2017

УДК 338.24(075.8)
ББК 65.050.2я73
Н 41

Рекомендовано Вченою радою
Національного університету біоресурсів і природокористування України
(протокол №4 від 22.11.2017 р.)

Рецензенти:
П. М. Григорук, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизованих систем і моделювання в економіці Хмельницький національний університет;
Н. К. Максишко, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Запорізький національний університет;
В. А. Ткачук, доктор економічних наук, доцент, проректор з науково-педагогічної роботи, міжнародної діяльності та розвитку Національний університет біоресурсів і природокористування України.

Н 41 **Негрей М. В., Тужик К. Л.** Теорія прийняття рішень [Навчальний посібник] / М. В. Негрей, К. Л. Тужик. – Київ: Центр учбової літератури, 2017. – 272 с.

ISBN 978-611-01-1110-2

Навчальний посібник містить методи та моделі, що використовуються для прийняття управлінських рішень в різних сферах господарювання. Розкриваються теорії раціональної поведінки, особливості обробки інформації у зв'язку з прийняттям рішень. Викладений у посібнику матеріал надасть змогу студентам ознайомитися з базовими моделями, методами та алгоритмами прийняття рішень, оволодіти методологією та методикою побудови, аналізу й застосування математичних моделей в управлінні, ознайомитися з типовими методами аналізу та прийняття рішень та набути навички їх практичного застосування.

УДК 338.24(075.8)
ББК 65.050.2я73

ISBN 978-611-01-1110-2

ЗМІСТ

ВСТУП

Не варто лише сподіватися на те,
що можна прийняти безпомилкове рішення, навпаки, слід
заздалегідь примиритися з тим, що всяке рішення сумнівне, бо це
звичайна річ, коли, уникнувши однієї халепи, потрапляєш в іншу.
Однак у тому й полягає мудрість, щоб, зваживши всі можливі
неприємності, найменше зло визнати за благо.
Н. Макіавеллі

Процеси прийняття рішень лежать в основі будь-якої цілеспрямованої діяльності: економіці, політиці, соціальній сфері, техніці, комп'ютерних науках тощо. Ми приймаємо рішення щодня: формуємо розпорядок дня, вибираємо меню, одяг, приймаємо рішення щодо купівлі тих чи інших товарів, вибираємо на яку спеціальність в який ВНЗ вступати. Рішення приймаються на підприємствах, в установах, організаціях, на рівні однієї особи, колективу, держави чи суспільства загалом.

Вивченням і розвитком методів прийняття рішень спочатку займалась така дисципліна, як «Дослідження операцій». На сучасному етапі розвитку науки методи та моделі, що використовуються для прийняття управлінських рішень є предметом окремої дисципліни – «Теорія прийняття рішень».

Процес прийняття рішень представляє собою складну задачу з великим потоком інформації. Тому виникає потреба в розробці альтернатив, їх оцінки та вибору найкращої для подальшої реалізації рішення. У посібнику розкриті основні етапи процесу прийняття рішень, висвітлені основні методи та моделі, які застосовуються в процесі прийняття рішення в різних ситуаціях з наведенням практичних прикладів та розв'язками до них з використанням програмного забезпечення.

Необхідно відмітити, що навчальний посібник не є математичною книгою, хоча очевидно, що суб'єкт прийняття рішення повинен опиратися на математичний апарат, оскільки практично неможливо приймати рішення без допомоги показників, співвідношень, алгоритмів тощо, які є по суті математичними поняттями.

Мета підручника полягає у формуванні навичок у студентів як майбутніх спеціалістів щодо збору даних, аналізу фактів, їх обробки з метою отримання достовірних результатів, формування висновків і прийняття обґрунтованих рішень. Методи і моделі прийняття рішень, наведені у посібнику, можуть застосовуватись у різних сферах діяльності.

У навчальному посібнику викладено матеріал у відповідності до загальноприйнятих теорій, які поширені в усьому світі. Звичайно, можливі й інші точки зору по тим чи іншим частковим питанням.

ТЕМА 1

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

Сутність та види управлінських рішень

Управління можна коротко визначити як цілеспрямовану дію на керовану систему. Некерована система має велику кількість ступенів свободи, відзначається значною невизначеністю. Управління призначене для обмеження числа ступенів свободи, зменшення невизначеності. Тобто для того, щоб результат функціонування системи найповніше відповідав поставленій меті.

Управління є зміною стану об’єкта, системи або процесу, що спричинює досягнення певної мети, або є підтримкою системи (об’єкта) в деякій множині бажаних станів під час впливів на неї різних збурень з боку середовища.

Часто ***метою управління*** є підтримка деяких характеристик системи (швидкість системи, температура повітря) на визначеному заданому рівні. В інших випадках мета системи, а, отже, і мета управління полягають у досягненні екстремального значення деякої функції змінних величин системи – ***критерію управління***. Таке управління системою називають ***оптимальним управлінням системою***.

Принципова ***схема системи управління*** та її основні інформаційні зв’язки наступна. Керована система відчуває вплив зовнішнього середовища – сигнал на вході, на який накладаються перешкоди (збурення).

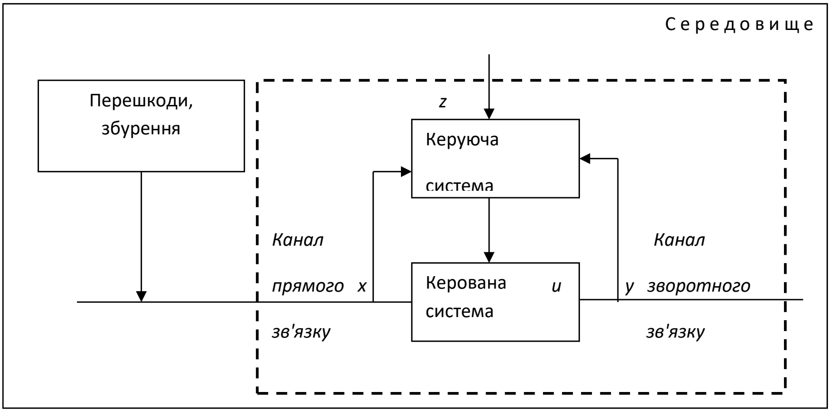


Рис. 1.1. Принципова схема управління

Методи пошуку управління *U*, засоби щодо його здійснення та результат управління обирають залежно від того, що відомо про систему і що враховується при визначенні управління, тобто від того, яку модель системи використовують і чи відповідає вона реальній системі.

Зворотний зв'язок є впливом виходу деякої системи на її вхід або у ширшому розумінні – впливом результатів дії системи на характер цієї дії. Принцип зворотного зв'язку є одним з головних у кібернетиці та теорії систем. Він характерний для замкнених систем управління, де управління формується за відхиленням системи від певного стану.

Отже, аналіз управління виокремлює таку трійку – середовище, об'єкт і суб'єкт, всередині якої і відбувається процес управління. Тут суб'єкт відчуває на собі вплив середовища *X* і вплив об'єкта *Y*. Якщо стан середовища *X* суб'єкт не може змінити, то станом об'єкта *Y* він може управляти за допомогою спеціально організованого впливу *U*, що і є управлінням.

Рішення – це вибір управлінцем найкращого варіанту дій з множини можливих (Абчук В.А.).

Рішення – це творчий процес випрацювання однієї або кількох альтернатив з множини можливих варіантів (Завадський Й.С.).

Управлінське рішення – це вибір альтернативи, акт, який спрямований на вирішення проблемної ситуації (Осовська Г.В.).

Управлінське рішення – це результат аналізу, прогнозування, економічного обґрунтування та вибору альтернативи з множини варіантів, які спрямовані на досягнення конкретних цілей системи управління (Фатхутдінов Р.А.).

Управлінське рішення – це сукупний результат творчого процесу суб'єкта та дій колективу об'єкта управління з вирішення конкретної ситуації, що виникла у зв'язку з функціонуванням системи (Хміль Ф.І.).

Зазначимо, що в основі процесу управління лежить інформація щодо ситуації, яка склалася. Для цілеспрямованого прийняття рішень необхідно визначити мету та алгоритм управління, тобто як досягти цієї мети. Алгоритм – чітке правило, інструкція, вказівка, що і як необхідно робити для досягнення поставленої мети в ситуації, яка склалася.

Отже, головними **чинниками прийняття рішень**, притаманними будь-якій системі управління об'єктом, є:

- мета управління;
- інформація стану об'єкта і середовища;
- вплив на об'єкт, тобто власне саме управління;
- алгоритм управління.

Зауважимо, що усі проблеми управління визначаються складністю об'єкта.

Види управлінських рішень

- за цілями підприємства: стратегічні, тактичні, оперативні;
- за періодом дії: довгострокові, середньострокові, короткострокові;
- за функціональним змістом: організуючі, координуючі, активізуючі, регулюючі, контролюючі;
- за масштабом виконання: загальні (глобальні), спеціальні (локальні);
- за характером рішення: стандартні, творчі, прийняті за аналогією;

– за умовами прийняття та імовірності результатів: в умовах визначеності, в умовах ризику, в умовах невизначеності;
– за способом прийняття: індивідуальні, колективні, консультативні;
– за ступенем ефективності: оптимальні, раціональні, нераціональні;
– за способом обґрунтування: організаційні, інтуїтивні, адаптивні, раціональні, засновані на суб’єктивних судженнях;
– за характером впливу: директивні, нормативні, методичні, орієнтуючі, рекомендуючі, дозволяючі;
– за альтернативністю рішень: безальтернативні, багатоваріантні, інноваційні;
– залежно від особистості керівника: ризиковані, обережні, інертні, врівноважені, імпульсивні

Методи та способи прийняття управлінських рішень

На основі аналізу розвитку управління й науки управління розрізняють п’ять напрямів формування теорії управління.

1. Наукове управління. Прихильники цього напряму здійснювали системний аналіз і нормування робіт з метою створення методик економічного стимулювання для підвищення продуктивності праці на рівні елементарних виробничих підрозділів (цехів, бригад). Цей напрям не дав відчутних результатів у розв’язанні загальних проблем управління через спрямованість на аналіз ефективності індивідуальної праці.

2. Біхевіористичний підхід. Цей напрям вимагає з теорії управління, яка вивчає вплив на продуктивність праці взаємовідносин між виконавцями, відповідності досвіду виконавця його функціям. Тут розрізняється два аспекти. Перший – у процесі управління перевагу надають інтересам виробництва; другий – перевагу надають людському чиннику у виробництві.

3. Теорія прийняття рішень. Суть цього напряму полягає в розвитку навичок керівника оцінювати проблему загалом і визначити її оптимальне вирішення. Цей напрям вивчає організаційну структуру процесу прийняття рішень і загальні концепції прийняття рішень.

4. Кількісний аналіз. Цей підхід в управлінні ще називають математичним, він налічує два шляхи: дослідження операцій і теорію управління. Кількісний аналіз передбачає дослідження системи з допомогою методів математичного моделювання. Кількісні проблеми в управлінні розв'язуються різними спеціалістами (математиками, економістами з використанням ЕОМ, інженерами-практиками з питань специфіки об'єкта управління). Цей напрям багато зробив у розв'язанні проблеми управління, уніфікації його теорії.

Необхідною умовою ефективного управління виробничою системою взагалі є розуміння усіх цих напрямів і досконале знання хоча б одного з них.

5. Управління як процес. За цією концепцією управління розглядають як процес, що складається з окремих стадій: планування, організації, координування, керівництва, мотивації. Причому вважають, що керівник, пройшовши відповідну школу підготовки, може керувати будь-якою системою, якій властива така стадійність процесу управління. Пізніше було зачислено до даного напряму ще й концепцію суворої вертикальної субординації з метою зосередження зусиль на розв'язанні певних основних проблем.

Об'єкти і суб'єкти рішення

У теорії прийняття рішень вживають термін "особа, що приймає рішення", скорочено ОПР. Це той, на кому лежить відповідальність за прийняте рішення, той, хто підписує наказ або інший документ, в якому виражене рішення. Зазвичай це генеральний директор або голова правління компанії, командир військової частини, мер міста, голова адміністрації, начальник відділу і т.п., тобто, відповідальний працівник. Іноді може приймати рішення колективний ОПР, наприклад, Рада директорів компанії або Верховна Рада України.

Проект рішення готують фахівці, як кажуть, "апарат ОПР", часто разом із співробітниками інших організацій. Якщо ОПР довіряє своїм помічникам, то може навіть не читати текст, а просто підписати його. Але відповідальність все одно лежить на ОПР, а не на тих, хто брав участь у підготовці рішення.

При практичній роботі важливо чітко відокремлювати етап дискусій, коли розглядаються різні варіанти рішення, від етапу прийняття рішення, після якого треба рішення виконувати, а не обговорювати.

Порядок підготовки рішення (регламент). Часті конфлікти між менеджерами з приводу сфер відповідальності – хто за що відповідає, хто які рішення приймає. Тому дуже важливі регламенти, що визначають порядок роботи. Недарма будь-які збори прийнято починати з утвердження головуючого, секретаря та повістки засідання, а роботу будь-якого підприємства або громадського об'єднання – із затвердження його статуту.

Мета. Кожне рішення спрямоване на досягнення однієї або кількох цілей. Наприклад, цілями керівництва підприємства можуть бути :

- здійснювати місію фірми;

- отримувати максимально можливий прибуток (в умовах невизначеності зовнішнього середовища).

Ці дві мети можна досягти одночасно. Однак так буває не завжди.

Наприклад, часто зустрічається формулювання цілі "максимум прибутку при мінімумі витрат", яка є внутрішньо суперечливою. Мінімум витрат дорівнює 0, коли робота не проводиться, але тоді і прибуток теж дорівнює 0. Якщо ж прибуток великий, то і витрати великі, оскільки і те, й інше пов'язане з обсягом виробництва. Можна або максимізувати прибуток при фіксованих витратах, або мінімізувати витрати при заданому прибутку, але неможливо досягти "максимуму прибутку при мінімумі витрат".

Однієї і тієї ж мети можна, як правило, домогтися різними способами.

Ресурси. Кожне рішення передбачає використання тих чи інших ресурсів. У повсякденному житті ми найчастіше приймаємо рішення, купуючи товари та послуги. І тут абсолютно зрозуміло, що таке ресурси – це кількість грошей в нашому гаманці.

При практичній роботі над проектом рішення важливо весь час повторювати: "Чого ми хочемо досягти? Які ресурси ми готові використовувати для цього?"

Ризики та невизначеності. Багато рішень приймаються в умовах ризику, тобто при можливій небезпеці втрат. Це пов’язано із невизначеністю, яка нас оточує. Крім негативних (небажаних) несподіванок бувають позитивні – ми називаємо їх успіхами. Менеджери намагаються застрахуватися від втрат і не пропустити удачу.

Критерії оцінки рішення. Різні ОПР у одній і тій же ситуації можуть використовувати різні критерії для вибору найкращого варіанта рішення. Тому за одних і тих же умов можна отримати різні рішення. В цьому проявляється суб’єктивізм прийнятих рішень.

Основна модель прийняття рішень

Наочним способом структурування та подання проблем прийня-ку рішень при невизначених очікуваннях є основна модель теорії прийняття рішень. Істотними елементами цієї моделі є матриця результатів (рис.) І цільова функція.

Матриця результатів

У матриці результатів у підметі представлені оцінювані альтернативи дій (A1, A2, ..., AA), а в присудок - стану зовнішнього середовища (S1, S2, ..., SS), які ОПР розглядає як можливі, причому кожному з них у відповідність ставляться показники ймовірності настання цього стану (w (S,), ..., w (Ss)). Елементами матриці є результати, причому Eas (a = 1, 2, ..., A; s = 1, 2, ..., S) означає результат, який буде досягнутий, якщо буде обрана альтернатива Aa і настане стан зовнішнього середовища Ss .

Складові частини моделі прийняття рішення

У кожній моделі прийняття рішень більш-менш точно представлені наступні елементи:

- альтернативи дій;
- результати;
- стан зовнішнього середовища (з урахуванням ймовірності її впливу на результати рішення);
- цільова функція ОПР.
- оцінювані альтернативи.

Виявлення і дослідження альтернатив дій. Щоб реалізувати процес переходу з поточного стану в бажане, необхідно провести її деякі заходи. Виникає питання, які варіанти дій взагалі існують в даній ситуації і наскільки вони можуть забезпечити досягнення бажаного стану.

Встановлення альтернатив дій, оцінюваних в рамках моделі, вже являє собою попереднє рішення: кінцеве рішення може відбутися у-ять виключно у виборі однієї з цих (допустимих) альтернатив; інші види дій (більше) не враховуються. Якщо виявлене таким чином рішення представляється незадовільним, безліч розглянутих альтернативних дій може бути розширене.

Результати альтернатив дій

Вибір однієї альтернативи дій. З усієї множини допустимих способів дій на даному етапі у відповідності з метою вибирається найкраща (або, як мінімум, «хороша») альтернатива. Форма вибору орієнтована на ту чи іншу модель прийняття рішень.

Стан зовнішнього середовища та їх вплив на прийняття рішення.

Результат, який буде досягнутий при виборі конкретної альтернативи, залежить від величин, на які ОПР в рамках сформованої ситуації прийняття рішення не може або не хоче вплинути. Величини, що впливають на результати альтернатив, але не є змінними рішення, контрольованими ОПР, іменуються (істотними для даного рішення) даними.

Цільова функція

Ухвалення раціонального рішення можливо лише тоді, коли існують уявлення про мету, за допомогою яких можливо буде оцінювати вибрані альтернативи. Проблема рішення нерідко описується вже у вигляді (предметної) цілі - наприклад, усунення шкоди, отримання певної посади, здійснення інвестицій, здатних відшкодувати втрачене. Мета полягає в досягненні кінцевого бажаного стану.

Детермінанти (фактори) рішення

Управління завжди здійснюється шляхом впливу на певні детермінанти рішень. Розрізняють первинні і вторинні детермінанти рішення. При складанні переліку первинних детермінант ґрунтуються на-безпосередніх елементах моделі прийняття рішень.

Перелік первинних детермінант рішення: модель прийняття рішень (ЕМ); множина (оцінюваних) альтернатив (дій) (А);

можливі результати (Е); інформаційна структура ОПР (IS); функція прогнозування ОПР (PF); цільова функція ОПР (ZF).

Вторинні детермінанти рішення

Перша група вторинних детермінант характеризує (суб'єктивні) ОПР (мотивація, кваліфікація, принципове ставлення до майбутнього), друга описує об'єктивні обмеження зовнішнього середовища, в рамках якого діє ОПР (властивості зовнішнього середовища).

Взаємозв'язок первинних і вторинних детермінант.

Моделювання як метод дослідження систем застосовується при розроблення досить складних управлінських рішень і являє собою побудова моделей або системи моделей досліджуваного об'єкта для його вивчення. Дослідження моделей об'єктів дозволяє уточнити властивості і характеристики досліджуваного явища. Використання моделей об'єктів дозволяє проводить активні експерименти, які неможливі з самим досліджуваним об'єктом. Проблеми застосування моделювання вивчаються в багатьох науках, але особливо вони актуальні в сфері економіки.

Модель завжди тісно пов'язана з проблемою, оскільки рішення проблеми завжди починається з моделювання проблемної ситуації об'єкта, а потім уже переходять до моделювання стратегічних альтернатив і моделюванню послід-наслідком прийнятого рішення, куди, природно, включаються такі елементи, як мета розвитку об'єкта управління, стан зовнішнього середовища, функціонування об'єкта та ін.

Необхідність формалізації та моделювання пов'язані не тільки з рівнем пізнання об'єкта, але і з його складністю. Чим складніше область дослідження, тим важливіше використання для її вивчення моделей і формалізованих методів.

Класифікація моделей

За видом відображення реальної дійсності прийнято виділяти моделі: фізичну, графічну і математичну. Моделі прийняття рішень використовують в основному математичні моделі. В процесі прийняття рішень, на етапах постановки проблеми, пошуку альтернатив використовуються також описова (дескриптивна) і нормативна (аналітична) моделі.

Дескриптивні (описові) моделі ґрунтуються на емпіричних спостереженнях, вони містять невелику кількість елементів і пояснюють економічні співвідношення так, як вони існують в реальному світі, але в спрощеній формі. Взаємозв'язку між елементами можуть бути описані у вигляді простих математичних рівнянь. Їх недолік полягає в тому, що вони не відображають функціональні взаємозв'язки і обмеження, але вони створюють основу для побудови більш складних моделей.

Нормативні (аналітичні, оптимізаційні) моделі дозволяють ОПР виявити найбільш ефективні шляхи досягнення поставленої мети.

Класична (нормативна) модель прийняття рішень

Класична модель прийняття рішень ґрунтується на економічних припущеннях. Дійсно, управлінське рішення має відповідати економічним інтересам організації.

Класична модель вважається нормативною, вона визначає, як повинен діяти здійснює вибір менеджер, але нічого не говорить про те, як насправді відбувається прийняття рішень. Цінність моделі полягає в тому, що вона спонукає менеджерів до раціональних рішень.

Класична модель найбільш адекватна програмованим рішенням, ситуацій впевненості або ризику, коли є доступ до всієї необхідної інформації, що дозволяє розрахувати ймовірності фіналів.

Адміністративна (дескриптивна) модель прийняття рішень

Адміністративна модель описує реальний процес прийняття рішення у важких ситуаціях (непрограмовані рішення і ситуації невпевнененості і невизначеності), коли менеджери, навіть якщо вони захочуть, не можуть прийняти економічно раціональне рішення.

Обмежена раціональність і прийнятність. Адміністративна модель прийняття рішень ґрунтується на роботах Герберта Саймона (запропонованого-який жив поняття класичної та адміністративної моделей).

Прийнятність означає, що особа, яка приймає рішення, вибирає пер-вий, що задовольняє мінімального критерію допустимості варіант.

Політична модель прийняття рішень

Дана модель використовується, як правило, для прийняття непрограмованих рішень в умовах непевності, обмеженості інформації та відсутності єдиної думки про те, яку мету переслідувати або яку лінію по-ведення вибрати.

У разі коли менеджерам належить прийняти складне організаційне рішення, створюються коаліції. Коаліція являє собою неформальний альянс, що розділяють певні цілі між менеджерами. Іншими словами, менеджер, який відстоює певний варіант управлінського рішення (наприклад, поглинання компанії-конкурента з метою забезпечення зростання), веде неформальне спілкування з іншими керівниками, переконуючи їх виступити «єдиним фронтом». Створення коаліцій дозволяє ініціативним менеджерам внести свій внесок у процес прийняття рішень і домогтися прийняття пропоновані ними варіанти.

Детермінанти (фактори рішення). Первинні детермінанти: основна модель прийняття рішень - EM; безліч альтернатив - Ai; можливі результати E; інформаційна структура - IS; функція прогнозування - PF; цільова функція - ZF.

Вторинні детермінанти: якість ОПР (мотивація; компетенції; принципове ставлення до майбутнього); зовнішнє середовище ОПР (зовнішнє організаційні оточення; внутрішнє середовище організації як право розподілення ресурсів, об'єктів робіт; реакція інших менеджерів).

Сучасний етап розвитку теорії прийняття рішень.

Теорія прийняття рішень – наука, яка розвивається швидко. Завдання, якими вона займається, породжені практикою управлінських рішень на різних рівнях - від окремого підрозділу або малого підприємства до держав і міжнародних організацій. Розглянемо деякі проблеми, що активно обговорюються на сучасному етапі розвитку теорії прийняття рішень. Це – системний підхід при прийнятті рішень, сучасні методи прийняття рішень і проблеми горизонту планування.

Системний підхід при прийнятті рішень. При обговоренні проблем прийняття рішень часто говорять про системний підхід, системи, системний аналіз. Мова йде про те, що проблему потрібно розглядати в цілому, а не "висмикувати" для обговорення якусь одну рису, хоча й важливу. Так, при масовому житловому будівництві можна "висмикнути" рису - вартість квадратного метра в будинку. Тоді найбільш дешеві будинку - п'ятиповерхівки. Якщо ж поглянути системно, врахувати вартість транспортних і інженерних комунікацій (підвідних електроенергію, воду, тепло та ін.), то оптимальне рішення вже інше - дев'ятиповерхові будинки.

Так, наприклад, менеджер банку, який відповідає за поширення пластикових карт, може зосередитися на рекламі. Тим часом йому від системи "банк - власники карт" краще перейти до системи "банк - керівники організацій - власники карт". Домовленість з керівником установи, яка дала в підсумку наказ виплачувати заробітну плату за допомогою пластикових карт, дасть нашому менеджеру набагато більший приріст чисельності власників карт, ніж постійна дорога реклама. Його помилка полягала в неправильному виділення системи, з якою він повинен працювати.

Менеджер банку буде не правий, оцінюючи роботу підрозділів банку в поточних рублях. Обов'язково треба враховувати інфляцію. Інакше ми стикаємося з парадоксальними явищами, коли реальна ставка плати за кредит негативна; або ж - рублевий оборот зростає, банк нібито процвітає, а після переходу до порівнянними цінами шляхом ділення на індекс інфляції стає ясно, що справи банку погані.

Різних визначень поняття «система» - десятки. Спільним у них є те, що про систему говорять як про безліч, між елементами якого є зв'язку. Цілісність системи і її "відокремленість" від навколишнього світу забезпечуються тим, що взаємозв'язки всередині системи суттєво сильнішими, ніж зв'язок будь-якого її елемента з будь-яким елементом, що лежить всі системи. За визначенням дійсного члена Російської академії наук Н.Н.Моисеева: "Системний аналіз - це дисципліна, що займається проблемами прийняття рішень в умовах, коли вибір альтернативи потребує аналізу складної інформації різної фізичної природи" [3].

Сучасні методи прийняття рішень. Крім згаданих чи коротко розглянутих вище методів, насамперед експертних, при прийнятті рішень застосовують весь арсенал методів сучасної прикладної математики. Вони використовуються для оцінки ситуації та прогнозування при виборі цілей, для генерування безлічі можливих варіантів рішень і вибору з них найкращого.

Перш за все треба назвати всілякі методи оптимізації (математичного програмування). Для боротьби з багатокритеріальністю використовують різні методи згортки критеріїв, а також інтерактивні комп'ютерні системи, що дозволяють виробляти рішення в процесі діалогу людини і ЕОМ. Застосовують імітаційне моделювання, що базується на комп'ютерних системах, що відповідають на питання: "Що буде, якщо ...?", Метод статистичних випробувань (Монте-Карло), моделі надійності та масового обслуговування. Часто необхідні статистичні (економетричні) методи, зокрема, методи вибіркових обстежень. При прийнятті рішень застосовують як ймовірнісно-статистичні моделі, так і методи аналізу даних.

Особливої уваги заслуговують проблеми невизначеності і ризику, пов'язаних як з природою, так і з поведінкою людей. Розроблено різні способи опису невизначеностей: імовірнісні моделі, теорія нечіткості, інтервальна математика. Для опису конфліктів (конкуренції) корисна теорія ігор. Для структуризації ризиків використовують дерева причин і наслідків (діаграми типу "риб'ячий скелет"). Менеджеру важливо враховувати постійні та аварійні екологічні ризики. Плата за ризик і різні форми страхування також постійно повинні бути в його полі зору.

Необхідно підкреслити, що досить корисні і різні прості прийоми прийняття рішень. Наприклад, при порівнянні двох можливих місць роботи вельми допомагає таблиця з трьох стовпців. У лівому з них перераховані характеристики робочого місця: заробіток, тривалість робочого часу, час у дорозі від дому до роботи, надійність підприємства, можливості для професійного росту, характеристики робочого місця і безпосереднього начальства та ін. А в двох інших шпальтах - оцінки цих характеристик, в "натуральних" показниках або у відсотках від максимуму. Іноді при погляді на подібну таблицю все відразу стає ясно. Але можна обчислити значення узагальненого показника, ввівши вагові коефіцієнти і склавши зважені оцінки уздовж стовпців. Не менш корисно зобразити на папері можливі варіанти рішення, яке належить прийняти, а також можливі реакції осіб і організацій на ті чи інші варіанти рішення, а потім і можливі відповіді на ці реакції. Корисні таблиці доводів "за" і "проти" та ін.

Проблема горизонту планування. У багатьох ситуаціях тривалість проекту не визначена або горизонт планування інвестора не охоплює всю тривалість реалізації проекту до етапу утилізації. У таких випадках важливо вивчити вплив горизонту планування на прийняті рішення.

Розглянемо умовний приклад. Припустимо, я є власником заводу. Якщо горизонт мого планування - 1 місяць, то найбільший грошовий дохід я отримаю, продавши підприємство. Якщо ж планую на рік, то я спочатку понесу витрати, закупивши сировину і сплативши працю робітників, і тільки потім, продавши продукцію, отримаю прибуток. Якщо я планую на 10 років, то піду на великі витрати, закупивши ліцензії та нове обладнання, з метою збільшення доходу в подальші роки. При плануванні на 30 років має сенс вкласти кошти у створення та розвиток власного науково-дослідного центру, і т.д.

Таким чином, популярне твердження "фірма працює заради максимізації прибутку" не має точного сенсу. За який період максимізувати прибуток - за місяць, рік, 10 або 30 років? Від горизонту планування залежать прийняті рішення. Розуміючи це, ряд західних економістів відмовляються розглядати фірми як інструменти для отримання прибутку, воліють дивитися на них як на живі істоти, що намагаються забезпечити своє існування і розвиток. (Докладніше проблеми стійкості прийнятих рішень до зміни горизонту планування розглядаються в монографії [5].)

Як уже зазначалося, в останні роки все більшої популярності отримує т.зв. контролінг - сучасна концепція системного управління організацією, в основі якої лежить прагнення забезпечити її довгострокове ефективне існування [6,7]. У конкретних прикладних роботах успіх досягається при комбінованому застосуванні різних методів. Для підготовки рішень створюються аналітичні центри і "ситуаційні кімнати", що дозволяють з'єднувати людську інтуїцію і комп'ютерні розрахунки. Все ширше використовуються інформаційні технології підтримки прийняття рішень, насамперед в контролінгу.

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

Задачі для самостійного опрацювання

Об’єктом дослідження буде підприємство - це компанія середнього масштабу, яка виготовляє народного споживання. Останнім часом компанія мала високу репутацію завдяки високій якості продукції та сервісу. Однак ситуація змінилася.

По-перше, різко скоротилася кількість замовлень на основну продукцію підприємства - електродвигуни для насосних станцій. При цьому зменшення платоспроможного попиту супроводжувалося підвищенням вимог замовників до характеристик продукції.

По-друге, була здійснена приватизація. З цього часу розвиток виробництва необхідно було здійснювати вже не за рахунок централізованих джерел, а за рахунок самостійно зароблених коштів. Як наслідок - упродовж останніх років компанія звітує про збитки.

Про стан підприємства свідчать такі цифри: половина основних фондів експлуатується понад 25 років; номенклатура продукції заводу оновлюється щорічно тільки на 1-2 %; рівень витрат на 1 грн. продукції становить 90 коп. при плані 75 коп.

У поточному році керівництво підприємства приступило до формування антикризової програми розвитку виробництва та збуту. Була скликана екстрена нарада, на порядку денному якої постало питання: “Які чинники призвели до існуючої ситуації?” Іншими словами, керівництво приступило до першого етапу процесу прийняття рішень - етапу, присвяченого дослідженню проблемної ситуації, виявленню її причин і наслідків.

Експерти та аналітики визначили пари взаємопов’язаних чинників.

1. У середовищі Decision Explorer побудуйте карту проблеми, яка відображає основні взаємозв’язки причин і наслідків проблемної ситуації. Створену карту проблеми занесіть до звіту.

2. Створіть власний стиль оформлення моделі.

3. За допомогою інструментарію Decision Explorer проведіть аналіз карти проблеми:

- виявіть та занесіть до звіту три ключові ланки системи при - чинно-наслідкових зв’язків і на їх основі сформулюйте 3 основні завдання антикризового управління;
- визначте і занесіть до звіту дві відносно незалежні підсистеми чинників та їх елементи, які сприяють погіршенню кризового становища.

На основі отриманих результатів визначте напрямки формування двох підсистем антикризового управління:

· визначте склад петель зворотного зв'язку між кризовими факторами;

· з'ясуйте причини недостатності власних фінансових коштів підприємства *(Вказівка.* До елемента "Недостатність власних коштів" моделі потрібно застосувати команду *Map concept*, яка дозволяє побачити ієрархію "підпорядкованих" ланок даного елемента моделі).

4. Розробіть альтернативні варіанти вирішення проблеми (3 альтернативи).

5. Сформуйте перелік критеріїв оцінки альтернатив (3 критерії).

6. Дайте суб'єктивні оцінки альтернатив по кожному з критеріїв за 10-бальною шкалою. Обґрунтуйте їх.

7. Для виявлення найкращого варіанта вирішення проблеми розрахуйте сумарні оцінки для кожної з альтернатив за всією множиною критеріїв.

Контрольні запитання

1. Сутність та види управлінських рішень.
2. Багатоаспектний підхід до прийняття управлінських рішень.
3. Методи та способи прийняття управлінських рішень.
4. Моделювання при прийнятті управлінських рішень: поняття та підходи.
5. Поняття системи, її властивості та структура.
6. Класифікація систем. Економічні системи.
7. Процес системного аналізу управлінських проблем.
8. Особливості застосування системного аналізу при вирішенні управлінських проблем.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Василенко В. А. Теорія і практика розробки управлінських рішень: навч. посіб. / В. А. Василенко. - К. : ЦНЛ, 2002. - 420 с.
2. Вовк В.М. Основи системного аналізу. Навч. посібник / В.М. Вовк, З.Б. Дрогомирецька – Львів : ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 248 с.
3. Кігель В. Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: монографія / В. Р. Кігель. - К. : ЦНЛ, - 202 с.
4. Колпаков, В. М. Теория и практика принятия управленческих решений: учеб. пособие / В. М. Колпаков. - [изд. 2-е, пере- раб. и доп.]. - К. : МАУП, 2004. - 504 с.
5. Мирзоахмедов Ф. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов [Текст]: монография / Ф.Мирзоахмедов. – Киев: Наукова думка, 1991. – 219 с.
6. Пушкар О. І. Системи підтримки прийняття рішень: навч. посібник / О. І. Пушкар, В. М. Гіковатий, О. С. Євсєєв, Л. В. Потрашкова ; ред. О. І. Пушкар. - Харків : Інжек, 2006. - 304 с.
7. Ситник В. Ф. та ін. Основи інформаційних систем: Навч. посібник. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. —К.: КНЕУ, 2001. — 420 с.
8. Ситник В.Ф., Гордієнко І.В. Системи підтримки прийняття рішень: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К: КНЕУ, 2004. – 427 с.

ТЕМА 2

ПРОЦЕС ПРИЙНЯТТЯ І РЕАЛІЗАЦІЇ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

В процесі прийняття рішення ключовим моментом є аналіз ситуації. Якщо ситуація проаналізована правильно, то і сутність проблеми оцінена безпомилково. Процес прийняття рішення відбувається шляхом поетапної процедури, яка є практичною у вирішенні навіть найскладніших проблем, і є ефективним методом підпорядкованості. Цикл аналізу рішення передбачає підхід, який зосереджує увагу на прийнятті самого рішення та надає можливість фахівцеві ефективно порівнювати альтернативи. Моделювання як детерміноване, так і ймовірнісне, вирішує проблему кількості управляючих елементів системи, в результаті чого система функціонує більш ефективно. Оцінка ймовірності дозволяє фахівцеві здійснити відповідні коригуючі правки щодо самого рішення.

Щодо кількості етапів процесу прийняття рішень єдиної думки серед теоретиків та практиків не існує. Частина науковців говорить про 5 етапів процесу прийняття рішення, інша частина переконує про важливість дотримання восьми етапів процесу (рис. 2.1).

Постановка проблеми є важливим кроком, що виступає базисом для виконання подальшої роботи для реалізації прийняття рішення та дозволяє відчути правильність напряму щодо збирання інформації. На останньому етапі процесу прийняття рішення остаточна постановка проблеми дозволяє структурувати фінальний звіт проекту.

Для ефективного визначення проблеми вчені пропонують дотримуватися наступних правил: думати про дефіцит і надмірність, наприклад: “В Україні занадто багато безхатченків”, “Попит на воду сільськогосподарськими підприємствами зростає швидше, ніж здатність природного ресурсу до відновлення та поповнення запасів”, “Зростання чисельності дітей шкільного віку в Каліфорнії становить 140 тис. осіб за рік, що значно перевищує швидкість розвитку фізичної здатності щодо навчання дітей”. Така методика допомагає нам усвідомити, що проблема, яка заслуговує на нашу увагу, не обов’язково існує сьогодні, але є потенційною в майбутньому, довгостроковому чи короткостроковому.

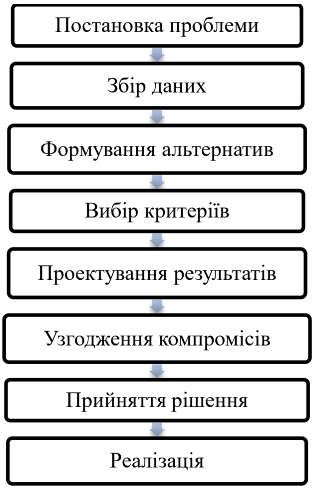


Рис. 2.1. Етапи процесу прийняття рішення

Окрім вище зазначеного, для ефективного висвітлення проблеми необхідно *оцінити її сутність* аналізуючи думки та припущення колег/оточуючих. Адже не всі можуть погодитись з тим, що фактори, які були визначені одним фахівцем як проблема, дійсно представляють собою проблему, оскільки кожен інший може застосовувати іншу структуру оцінки для цих факторів. Для того, щоб переконатись, що всі особи, що приймають рішення, згодні на вирішення поставленої проблеми потрібно, перш за все, задавати достатню кількість запитань, переконавшись, що фінальний звіт буде чітко відповідати запитанням рецензентів та зацікавлених сторін (рис. 2.2).

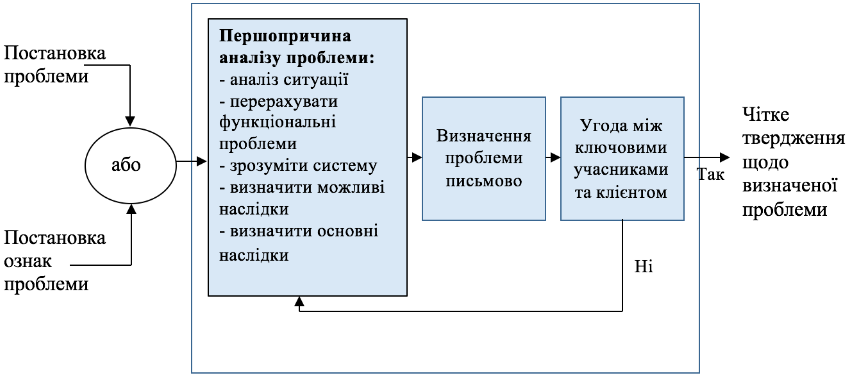


Рис. 2.2. Визначення проблеми: задайте достатньо питань, щоб в змозі відповісти на запитання інших

Збір даних. Весь процес прийняття рішення поділяється на дві дії: мислення та обмін даними, які можна перетворити на докази. Мислення, як правило, є більш важливою складовою, але збір даних, потребує значно більшого часу. Шлях до ефективного збору даних полягає у здійсненні наступних кроків:

- мислити перш ніж збирати;
- огляд літератури;
- дослідження кращих практик;
- використання аналогій;
- мислити креативно.

Формування альтернатив. Під альтернативою розуміється варіанти політики або альтернативні дії щодо вирішення проблеми. В процесі формування альтернатив необхідно *починати комплексно, орієнтуючись на кінцевий результат*. Опис кожної альтернативи повинен чітко показати, як вона вирішує визначену проблему і як вона відрізняється від інших альтернатив.

Особливої уваги заслуговує *моделювання системи*, де розміщена проблема в процесі формування альтернатив.

Вибір критеріїв. Очевидно, що всі сформовані альтернативи не можуть задовольнити цілі, тому необхідно порівнювати їх одна з одною з метою відбору найкращої, яка найбільше б відповідала цілям.

Для цього необхідно визначити критерії як об’єктивні показники цілей. Причому кожен критерій повинен визначати важливе і незалежне від інших критеріїв та відповідати основним вимогам:

- можливість розрізняти альтернативи;
- комплексність – включати всі цілі;
- операційність – осмислене розуміння того, хто приймає рішення про можливі наслідки альтернативи;
- нерезервованість – уникнення подвійного підрахунку;
- невелика чисельність – керованість параметрів.

Окрім цього, в деяких практичних рекомендаціях пропонується використовувати декілька методів, використання яких дозволяє полегшити вибір критеріїв:

- *Мозковий штурм* – груповий мозковий штурм може застосовуватись для визначення цілей та відповідних критеріїв.
- *Раунд Робін* – кожного з учасників команди індивідуально запитують про визначення цілей і критеріїв оцінки. На початковому етапі виявлення ідей повинно відбуватися без обґрунтувань та суджень. Всі ідеї повинні бути записані до того, як будуть піддані критиці.
- *Метод зворотного напрямку* – члени команди розглядають можливі альтернативи, визначають відмінності між ними та визначають критерії оцінки відмінностей.
- *Попереднє визначення критеріїв* – кінцеві критерії надаються користувачам, зацікавленим особам або учасникам, що приймають певне рішення.

На етапі **проектування результатів** учасники або зацікавлені особи зіштовхуються з великим об’ємом інформації. Тому є ймовірність виникнення необхідності зробити крок назад і оцінити складні й невизначені сценарії для двох-п’яти альтернатив, визначених на попередніх етапах процесу прийняття рішення, в поєднанні з основними відібраними їх варіантами. Зручним методом відображення результатів є їх відображення у вигляді матриці. Типова матрична форма результатів складається з рядків, де вказані альтернативи, і колонок, що містять критерії оцінювання альтернатив. Кожна клітинка містить прогнозовані результати. В таблиці 2.1 наведений приклад матриці звітних результатів процесу прийняття рішення, яка була побудована чотирма студентами на запит міжнародної організації навколишнього природного середовища (ICLEI) щодо сталого розвитку. Аналіз проводився на базі міста США Енітаун, в результаті якого групою студентів було обрано вісім альтернатив (сценаріїв), визначених за п’ятьма критеріями (кластерами). Як видно з таблиці, альтернативи вказані в рядках, а критерії – в стовпцях матриці.

Таблиця 2.1.

Порівняльний аналіз сценаріїв на прикладі Енітаун, США

(прогнозований базовий рівень CO_2е в 2050р.: 5.5 мільйонів метричних тон)

		(% зниження від базової рівня CO_2е до 2050)	**(Витрати на 1 тону зменшення викидів CO_2е, $)**	**О – операційний Е – економічний П – політичний**
	Сценарії	**Ефект**	**Економічна ефективність**	**Життєздатність, рівень**
Існуючі будівлі	Мандат щодо модернізації будинків	6.9 – 8.8	-130 – 5	О – високий Е – середній П – високий
	Мандат щодо модернізації комерційних будівель	7.9 – 10.5	-132 – -30	О – високий Е – середній П – високий
Нові будівлі	Вимоги зеро – енергії до будинків	4.1 – 5.6	-132 – -25	О – високий Е – високий П – високий
	Вимоги зеро – енергії до комерційних будинків	6.5 – 8.9	-120 – -48	О – високий Е – високий П – високий
Міське плануван	Забудова високої щільності	2.4	-1.333 – -702	О – високий Е – високий П – середній
Постачання енергії	Запровадження мотиваційних механізмів для розподіленого енергоспоживання	3.9	15 - 139	О – високий Е – середній П – високий
Фінансові механізми	Податок на карбон в розмірі 20 $	11.3	20	О – високий Е – середній П – низький
	Податок на карбон в розмірі 50 $	20.6	50	О – високий Е – середній П – низький

Матриця результатів допомагає визначити, що є, і що потрібно ще дослідити та вивчити. В разі, якщо матриця є громіздкою та складною, для сприйняття її можна скоротити шляхом поєднання схожих альтернатив, видалити альтернативи, які в будь-якому разі програють іншим, та інше.

Узгодження компромісів. Інколи трапляється, що один з варіантів альтернатив, як і очікувалось, забезпечить кращий результат, ніж будь-який інший за всіма критеріями оцінювання. Даний випадок має назву *"домінування"* – між альтернативами немає компромісів. Але в реальному житті зазвичай щастить менше, і виникає необхідність пояснення компромісів між результатами, що пов'язані з різними варіантами альтернатив задля задоволення потреб клієнта чи аудиторії.

Загальним прийомом щодо узгодження компромісів є:

- *аналіз компромісів як можливих альтернатив,* а не як прогнозованих показників;

- *встановлення пропорційності*: припустимо, що деяка альтернатива A1 дуже добре відповідає критерію C1, помірно добре – C2, і погано – C3. І припустимо, що A2 є протилежною до A1 відносно критеріїв оцінки. В такому разі, вибір між цими двома варіантами можливо здійснити за допомогою оцінки важливості критеріїв через визначення їх вагомих величин:

- *вибрати базовий варіант,*

- *сфокусуватися та поглибити аналіз.*

Прийняття рішення. Остаточне рішення повинно відповідати бажаному стану, вимогам і найкращим чином досягти цілей осіб, що приймають рішення. Після того, як вибрана альтернатива буде підтверджена, персонал, що приймає рішення, може представити його як рекомендацію для зацікавлених осіб або аудиторії.

Реалізація. Пройшовши всі етапи процесу прийняття рішення можна приступати до процесу реалізації даного рішення. В межах даного етапу можливе звітування та презентація даного рішення аудиторії або ж зацікавленим особам. В практиці даний метод вже має добру традицію проведення та отримав назву “**Storytelling”.** “Storytelling” не просто допомагає реалізувати/продати продукт/послугу, він показує, як ви вирішили проблему, як сформували потрібну цінність для когось. Велику увагу під час розповіді слід приділяти перспективам. Розповідаючи історію, ви допомагаєте перетворити потенційних клієнтів на клієнтів. Коли ви досліджуєте свого клієнта та дізнаєтесь, що для них важливо, ви можете визначити інформацію, яку вони потребують для прийняття рішення. Забезпечуючи людину цінною інформацією, яка безпосередньо пов'язана з тим, що для них є важливим, вони обов'язково цінуватимуть це і виявлять бажання співпрацювати.

Для ефективної презентації "Storytelling" необхідно дотримуватися декількох порад:

- *Використання тесту «бабуся Бессі».*
- *Аналіз аудиторії.*
- *Подумати в який спосіб презентувати.*
- *Надати презентації логічну та описову форму.*
- *Структурування звіту.*
- *Розробка прес-релізу.*

Для контактування з потенційними клієнтами та реалізації рішення можна використовувати соціальні медіа. Соціальні медіа дозволяють робити "теплі" дзвінки та електронні листи потенційним клієнтам. Все, що потрібно, це частина дослідницьких зусиль. Можна використовувати безліч інструментів (таких як Facebook, Instagram, LinkedIn, Twitter), щоб дізнатись більше про своїх потенційних клієнтів – їхні вподобання, діяльність, їхні захоплення час, які проблеми, бажання/потреби тощо.

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

Вивчення етапів процесу прийняття рішень

Методичні рекомендації

Важливу роль серед інструментів, які допомагають в прийнятті рішень, відіграють програми візуалізації. На сьогоднішній день найбільш розповсюдженими є ментальні карти, призначені для застосування на окремих етапах розробки управлінського рішення.

Ментальні карти (Mind Maps) – метод візуалізації та систематизації думок. Базові правила формування таких карт розробив у 60-ті роки XX ст. професор Джозеф Новак з Корнельського університету, який виходив з теорії Девіда Озубела. Пізніше, даний метод розвинув британець Тоні Бузен, який і дав назву "Mind Maps". Ось як він описує даний метод:

"...уявна карта будується на підставі центрального слова або концепції, навколо яких розташовуються від 5 до 10 головних ідей стосовно нього. Кожне з цих дочірніх слів знову-таки оточується 5-10 головними ідеями".

Ментальна карта (розумова карта) – це спеціальна форма діаграми для дослідження знання, збору і розподілу інформації. Картографування представлень є стратегією, яка використовується при розробці розумових карт.

Ментальні карти складаються з вузлів (nodes) або осередків (cells), які містять поняття, пункти або питання (concept) й посилання. Посилання помічені мітками і показують напрям за допомогою символу стрілки. Посилання з міткою пояснює відношення між вузлами. Стрілка вказує напрям відношення і означає пропозицію.

Даний метод, зокрема, використовують декілька фірм, що створюють програмне забезпечення: MindMan, Inspiration Software і Smart Technologies.

На рисунку 2.3. наведено приклад побудови ментальної карти.

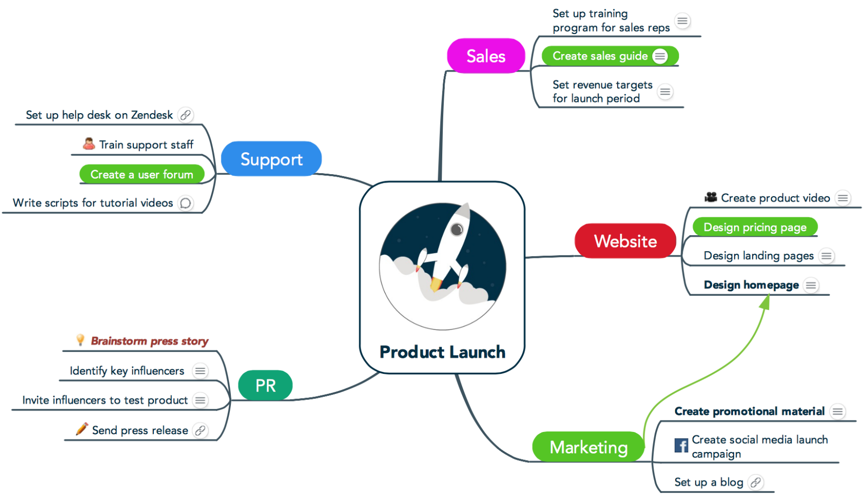


Рис. 2.3. Ментальна карта

Побудова ментальної карти

Побудова ментальної карти використовується на стадії постановки проблеми та формування альтернатив. В роботі пропонується обрати для себе зручнішу в користуванні програму (Mind Mapping, Decision Explorer, Vensim PLE) та дослідити можливості даної програми для застосування в процесі прийняття рішення та вирішення поставленої проблеми.

Побудова ментальних карт включає два основні етапи: синтез і аналіз.

На *першому етапі* формується візуальна модель, яка відображає сукупність елементів досліджуваної системи та зв’язки між ними.

На *другому етапі* одержаний результат піддається аналізу за допомогою спеціалізованого інструментарію програми.

В роботі пропонується застосовувати інструментарій лише на перших трьох етапах процесу прийняття рішення, об’єктом моделювання якого є постановка проблеми, збір даних та формування альтернатив. У цьому випадку елементами моделі є причини та наслідки проблеми, які візуально зображуються у вигляді прямокутних або інших фігур з відповідними написами. Взаємозв’язки між елементами моделі візуально зображуються у вигляді стрілок.

Для створення візуальної моделі на стадії синтезу в середовищі програми для побудови ментальних карт потрібна низка нескладних дій:

- подвійне клацання миші – для створення елементів моделі;
- операція Dragl & Drop – для створення зв'язків між елементами моделі (потрібно вказати на перший зі зв'язаних елементів, натиснути кнопку миші та, утримуючи її, перемістити курсор миші на другий елемент).

Завдання для самостійного опрацювання

Завдання 2.1.

Об'єктом дослідження є компанія "Колос". ТОВ "Колос" – підприємство середнього масштабу, яка виготовляє м'ясну продукцію. Останнім часом компанія мала високу репутацію завдяки високій якості продукції та сервісу. Однак ситуація змінилася.

По-перше, різко скоротився попит на продукцію. Дане явище було спричинене двома факторами: підвищення вимог споживачів до якості продукції та зростанням ціни виробника на товар.

По-друге, в результаті зростання продажів сільськогосподарських земель власниками паїв, які знаходились в оренді підприємства "Колос", зменшилась площа сільськогосподарських угідь господарства. Тому виробництво необхідно було адаптувати до викликів та знаходити додаткові джерела заохочення та утримання орендодавців паїв задля збереження площ земель. Як наслідок упродовж останніх років компанія звітує про збитки.

У поточному році керівництво підприємства приступило до формування антикризової програми розвитку виробництва та збуту. Була скликана екстрена нарада, на порядку денному якої постало питання: "Які чинники призвели до існуючої ситуації?". Іншими словами, керівництво приступило до першого етапу процесу прийняття рішень – етапу, присвяченого постановці і дослідження проблеми, виявленню її причин і наслідків. Експерти та аналітики визначили пари взаємопов'язаних чинників. Ці чинники наведені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Пари взаємопов’язаних чинників для побудови моделі

Чинник, який впливає	**Чинник, на який здійснюється вплив**
Великі витрати матеріалів та сировини	Висока собівартість продукції
Висока собівартість продукції	Недостатність власних засобів
Висока собівартість продукції	Низький попит на продукцію
Значна частка пасивної частини ОФ	Висока собівартість продукції
Мала частка ТНВ в обсязі продукції	Низький попит на продукцію
Недостатній аналіз ринку	Низький попит на продукцію
Недостатній аналіз ринку	Мала частка ТНВ в обсязі продукції
Недостатність власних засобів	Низький ступінь оновлення продукції
Недостатність власних засобів	Старіння оборотних фондів ОФ
Низька виконавча дисципліна	Висока собівартість продукції
Низький ступінь оновлення продукції	Низький попит на продукцію
Низький обсяг виробництва	Недостатність власних засобів
Низький попит на продукцію	Низький обсяг виробництва
Низький рівень стратегічного планування	Низька виконавча дисципліна
Низький рівень стратегічного планування	Слабке просування продукції на ринку
Низький рівень стратегічного планування	Мала частка ТНП в обсязі продукції
Низький рівень стратегічного планування	Недостатній аналіз ринку
Слабке просування продукції на ринку	Низький попит на продукцію
Старіння оборотних фондів (ОФ)	Висока собівартість продукції
Старіння оборотних фондів ОФ	Великі витрати матеріалів і сировини
Старіння оборотних фондів ОФ	Низький ступінь оновлення продукції

План виконання роботи

1. У середовищі вибраної програми побудуйте ментальну карту, яка відображає основні взаємозв’язки причин і наслідків ситуації. Створену карту занесіть до звіту.

2. Створіть власний стиль оформлення моделі.

3. Розробіть альтернативні варіанти вирішення проблеми (3 альтернативи).

4. Сформуйте перелік критеріїв оцінки альтернатив (3 критерії).

5. Дайте суб’єктивні оцінки альтернатив по кожному з критеріїв за 10-бальною шкалою. Обґрунтуйте їх.

6. Для виявлення найкращого варіанта вирішення проблеми розрахуйте сумарні оцінки для кожної з альтернатив за всією множиною критеріїв.

Завдання 2.2.

Сформувати матрицю результатів процесу прийняття рішення вибору щодо вступу до вищого навчального закладу та вибору спеціальності. Сформувати альтернативи (ВНЗ та спеціальності) та критерії їх оцінки (як приклад джерело: http://www.fao.org/3/a-mo850r.pdf).

Зробити власні висновки.

Завдання 2.3.

Використовуючи Integrated-Adaptable Methodology for the development of Decision Support System (IAMDSS) пропонується вирішити поставлену проблему та прийняти рішення, що зустрічається нам в повсякденному житті. Уявіть, що Ви прийшли до магазину і Вам потрібно обрати щось одне між кексом (AI 1) і круасаном з кремом-какао (AI 2).

Необхідно зібрати дані щодо двох видів випічки, визначити альтернативи (види пекарень), оцінити їх за критеріями (ціна, термін придатності, смак, умови зберігання, домішки) та вибрати найбільш близьку до Ваших вподобань альтернативу. Сформувати матрицю результатів. Зробити висновки.

Питання для контролю

1. Дайте визначення та назвіть особливості управлінських рішень.
2. Назвіть відмінності між слабо та добре структурованими рішеннями.
3. Дайте визначення понять “критерій” та “альтернатива”.
4. Приведіть послідовність та охарактеризуйте етапи процесу прийняття рішення.
5. Назвіть, які групи учасників беруть участь у прийнятті рішення, та охарактеризуйте роль кожної групи.
6. Опишіть етап постановки проблеми процесу прийняття рішення.

7. Яким чином проводиться збір інформації в процесі прийняття рішення?
8. Охарактеризуйте етап формування альтернатив процесу прийняття рішення.
9. Яким чином здійснюється вибір критеріїв у прийнятті рішення?
10. Опишіть етап проектування результатів процесу прийняття рішення.
11. Яким чином узгоджуються компроміси в процесі прийняття рішення?
12. Опишіть етап прийняття рішення.
13. Охарактеризуйте процес реалізації прийнятого рішення.
14. Назвіть призначення та особливості побудови “ментальних карт”.
15. Наведіть найбільш поширені програмні забезпечення для побудови ментальних карт. Визначте основні властивості та відмінності між ними.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Варфоламеев В. И. Принятие управленческих решений: учеб. пособ. для вузов. / В. И. Варфоламеев, С. Н. Воробьёв. - М. : КУДИЦОБРАЗ, 2001. - 288 с.
2. Василенко В. А. Теорія і практика розробки управлінських рішень : навч. посіб. / В. А. Василенко. - К. : ЦНЛ, 2002. - 420 с.
3. Вовчак, І. С. Інформаційні системи та комп’ютерні технології в менеджменті : навчальний посібник / Іван Сільвестрович Вовчак ; Мін-во освіти і науки України, Тернопільський держ. технічний ун-т ім. І. Пулюя. - Тернопіль : Карт-бланш, 2001. - 354 с.
4. Дюк, В. А. Data Mining - состояние проблемы, новые решения [Електронний ресурс] / В. А. Дюк. - Режим доступу : http://www.inftech. webservis.ru/database/datamining/ ar 1 .html.
5. Колпаков, В. М. Теория и практика принятия управленческих решений: учеб. пособие / В. М. Колпаков. - [изд. 2-е, пере- раб. и доп.]. - К. : МАУП, 2004. - 504 с.
6. Матрица результатов на 2016-2017 годы [Електронний ресурс] // FAO. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: http://www.fao.org/3/a-mo850r.pdf.
7. Пушкар, О. І. Системи підтримки прийняття рішень: навч. посібник / О. І. Пушкар, В. М. Гіковатий, О. С. Євсєєв, Л. В. Потрашкова ; ред. О. І. Пушкар. - Харків : Інжек, 2006. - 304 с.
8. Эддоус, М. Методы принятия решений : учебное пособие / М. Эддоус, Р. Стэнфилд, И. И. Елисеева. - М. : Аудит : ЮНИТИ, 1997. - 590 с.
9. Bardach E. A Practical Guide for Policy Analysis / E. Bardach. CQ Press, an Imprint of SAGE Publications, Inc. CQ Press is a registered trademark of Congressional Quarterly Inc. – 2011. – 171 p.
10. Krupa J. Guidebook to Decision-Making Methods. J.Krupa, K.B. Sorenson. – 2001. – 40 p.
11. Mcnamee P. Decision Analysis for the Professional. P. Mcnamee, J. Celona. - SmartOrg, Inc, 2008. – 342 p.
12. Munier N. A Strategy for Using Multicriteria Analysis in Decision-Making: A Guide for Simple and Complex Environmental Projects / N. Munier. – New York.: Springer, 2011 – 298 p.

ТЕМА 3

ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ І СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

Експертна інформація відіграє важливу роль при використанні сучасних методів підтримки прийняття рішень. Методи її отримання, представлення й обробки утворюють невід'ємну частину технології підтримки прийняття рішень.

Експерти (від латинського «expertus» – досвідчений) – це особи, що володіють знаннями і здатні висловити аргументовано думки по досліджуваному явищу. Процедура одержання оцінок від експертів називається **експертизою.**

Експертні методи оцінки можуть застосовуватись при розв’язку наступних задач:

- вибір варіантів технічного і соціально-економічного розвитку підприємства;
- відбір проектів при проведенні тендерів;
- відбір заявок на одержання грантів;
- формування тематики НДР;
- визначення стратегічних цілей компанії.

Важливим моментом є визначення чисельності осіб в експертній групі та відбір експертів відповідно їхньої кваліфікації та компетентності щодо поставленої проблеми. Існує декілька підходів до формування оптимальної чисельності групи експертів – формальних і неформальних. Для встановлення меж чисельності групи розраховується максимальна і мінімальна величини. З того часу, як виник експертний метод оцінок в США, не припиняються дискусії з приводу того, кого вважати експертом. Тому, існує твердження, що для експерта повинні бути притаманні професіоналізм у області дослідження, широта ерудиції та оригінальність мислення. Задача формування стабільної експертної групи зводиться до питання визначення оптимальних розмірів цієї групи, її структури та компетентності експертів.

Максимальна чисельність експертної групи визначається за формулою:

$$\mathbf{n_{max}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K_i}}{\mathbf{2K_{max}}} \tag{3.1}$$

де n_{max} – максимальне число експертів в групі; K_i – компетентність *i-го* експерта за шкалою компетентності; K_{max} – максимально можлива компетентність експерта за шкалою компетентності.

Мінімальна чисельність експертної групи визначається наступним чином:

$$\frac{\boldsymbol{B - B`}}{\boldsymbol{B_{max}}} < \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.2}$$

де *B* – середня оцінка прогнозованої величини в балах; *B’* – середня оцінка, яка дана експертною групою, з якої виключений/включений один експерт; B_{max} – максимально можлива оцінка прогнозованої величини в прийнятій шкалі оцінок; ε – задана величина змани середньої помилки при включенні/виключенні експерта.

Відтак, чисельність групи встановлюється в межах $\boldsymbol{n_{min} \le n \le n_{max}}$.

Число експертів в групі можна визначити також на основі *теорії вибіркового спостереження*, при якому обстежуються не всі елементи сукупності, що вивчається, а лише певним чином дібрана їх частина.

Середня гранична помилка частки розраховується за формулою:

$$\Delta \boldsymbol{\widetilde{p}} = \frac{\boldsymbol{t\sqrt{p(1-p)}}}{\boldsymbol{n}} \tag{3.3}$$

де $\Delta \widetilde{p}$ – середня гранична помилка частки; *t* – критерій Стьюдента при заданому рівні ймовірності; *p* – питома вага експертів, які мають певні ознаки, що встановлені операторами експертизи (наприклад, стаж роботи в даній сфері не менше 10 років та інше); *n* – кількість експертів в групі.

На підставі формули (3.3) розраховуємо *необхідну чисельність експертної групи* (*n*) за умови, що значення решти показників задані:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{p(1-p)}}{\Delta^2 \boldsymbol{p}} \boldsymbol{t^2} \tag{3.4}$$

Наприклад. В загальному списку експертів, що складається з 200 спеціалістів, 80 осіб мають стаж роботи у досліджуваній сфері більше 15 років. Виходячи із заданої максимальної величини стажу роботи, визначити необхідну чисельність експертів при заданій ймовірності *p=0.954* та $t = 2$.

Частка експертів зі стажем роботи понад 15 років становить: $p = \frac{80}{100} = 0.8$. Гранична похибка частки ($\Delta \tilde{p}$) = 0,15.

Підставивши дані в формулу (3.4), вибіркова чисельність експертів в групі становить:

$$n = \frac{0.5(1-0.5)}{0.15^2} 2^2 = 44 \text{ (експерти)}$$

Остаточне рішення про кількісний склад експертної групи приймають організатори (оператори) експертизи, враховуючи ситуацію у кожному конкретному випадку.

Перед тим, як приступити до аналізу поставленої проблеми, та після відбору чисельності потенційних експертів потрібно структурувати експертну групу, що обумовлено необхідністю відборону їх за спеціальністю для отримання кількісної і якісної оцінки поставленої проблеми в ході цілісного дослідження. Склад експертів із загального числа претендентів формується із найбільш компетентних спеціалістів, котрі можуть проявити максимальну здатність до передбачення майбутнього і адекватного відображення тенденції та закономірності розвитку досліджуваного процесу (явища, об’єкта).

Об’єктивний метод оцінки рівня компетентності експертів ґрунтується на застосуванні спеціально розроблених анкет, де містяться питання, відповіді на які дозволить визначити можливість включення спеціаліста у експертну групу. *Ступінь придатності* спеціаліста до експертизи по анкетному опитуванню визначається за коефіцієнтом компетентності:

$$\boldsymbol{K_a} = \frac{\sum \boldsymbol{V_{ij}}}{\sum \boldsymbol{V_j}} \tag{3.5}$$

де K_a – коефіцієнт компетентності за анкетним опитуванням; V_{ij} – вага j-ої градації (підкресленої експертом, що оцінюється) i-ій характеристиці (в балах); V_j – максимальна вага j-ої характеристики (в балах).

Можливе застосування *методу самооцінки* при визначенні компетентності експерта, коли кожен спеціаліст визначає ступінь своєї освіченості за 10 бальною шкалою, підкреслюючи відповідні бали:

10 балів – високий рівень компетентності;

8 балів – достатній рівень компетентності;

5 балів – задовільний рівень компетентності;

0 балів – малокомпетентний рівень.

Після чого визначається відповідний ваговий коефіцієнт шляхом ділення на десять.

Компетентність експерта за самооцінкою обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{K}_{\text{с}} = \frac{\sum \boldsymbol{\lambda l}}{\sum \boldsymbol{n}} \qquad (3.6)$$

де $K_{\text{с}}$ – коефіцієнт компетентності експерта за самооцінкою; λl – самооцінка в балах, яка характеризує ступінь обізнаності спеціаліста за l–тою проблемою; n – максимально можлива самооцінка (10 балів).

Найкращі результати дає узагальнююча оцінка компетентності, яка включає як анкетний метод, так і самооцінку та визначається за формулою:

$$\boldsymbol{K_k} = \frac{\dfrac{\sum \boldsymbol{V_{ij}}}{\sum \boldsymbol{V_j}} + \dfrac{\sum \boldsymbol{\lambda l}}{\sum \boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{m+1}} \qquad (3.7)$$

де K_k – комплексний коефіцієнт компетентності експерта; m – кількість використаних методів самооцінки.

Доречно навести ще один метод визначення рівня компетентності експерта, який є більш простим і швидким, порівняно з попередніми:

$$\boldsymbol{K_l} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{e_{lz}}}{\boldsymbol{m}} \qquad (3.8)$$

де $\boldsymbol{e_{lz}} = \left\{\frac{\boldsymbol{1}\ \boldsymbol{if}\ \boldsymbol{l}-\text{експерт включає } \boldsymbol{z}-\text{експерта у команді}}{\boldsymbol{0}\ \boldsymbol{if}\ \boldsymbol{l}-\text{експерт не включає } \boldsymbol{z}-\text{експерта у команді}}\right.$;

$\boldsymbol{K_l} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}]$.

$\boldsymbol{K_l}$ – коефіцієнт компетентності експерта; $\boldsymbol{e_{lz}}$ – взаємна оцінка експертів; $\boldsymbol{m}$ – чисельність експертів;

Чим вищим є значення коефіцієнта, тим кращою є компетенція експерта в цій галузі і тим більша доцільність включення його в експертну групу.

Порогове значення коефіцієнта компетенції становить 0,5.

Отже, підводячи підсумок процедури відбору експертів, можна сказати, що вони повинні відповідати наступним вимогам:

- *професійна компетентність і наявність дослідницького і практичного досвіду у відповідній області*;
- *креативність*;
- *наукова інтуїція* (інтуїція в значній мірі опирається на знання, досвід);
- *зацікавленість в об'єктивних результатах експертної роботи*;
- *незалежність судження*;
- *об'єктивність*;
- *евристичність* (здатність бачити і ставити неочевидні задачі).

Окрім вище зазначеного, бажано включити до складу експертної групи спеціалістів різного віку, різних організацій і, при можливості, з різних географічних точок, представників всіх напрямків і шкіл мислення в даній сфері.

Проведення експертної оцінки щодо прийняття рішення передбачає використання наступних заходів:

- *Інтуїтивно-логічний аналіз задачі*. Будується на логічному мисленні і інтуїції експертів, заснований на їх знанні і досвіді. І тим пояснюється високий рівень вимог, поставлених до експертів.
- *Розв'язок і видача кількісних або якісних оцінок.* Ця процедура являє собою завершальну частину роботи експертів. Вони формують розв'язок щодо поставленої проблеми та оцінюють очікувані результати.
- *Обробка результатів розв'язку*. Отримані від експертів оцінки повинні бути оброблені з метою одержання підсумкової оцінки проблеми. Залежно від поставленої задачі змінюється кількість виконуваних на даному етапі розрахункових і логічних процедур.

При підтримці прийняття рішень використовується експертна інформація двох видів: *концептуально-понятійна* й *оціночна*. Інформація першого типу представляє собою формування цілей, критеріїв, альтернатив, визначення принципів оптимальності. Вона представляється у текстовому вигляді на природній мові. До другого виду відноситься інформація про оцінку цілей, критеріїв та альтернатив. При цьому розрізняються *абсолютні* та *відносні* оцінки, останні, в свою чергу, поділяються на *ординарні* та *кардинальні*.

Найкраще, звичайно, мати абсолютні оцінки (вартість засобів для досягнення цілі; час, необхідний на реалізацію рішення; ефективність отриманого рішення тощо), але, як правило, витрати на їх отримання дуже великі, а їх точність, навпаки, низька. Відносні оцінки отримати, як правило, простіше, з іншого боку, "все пізнається у порівнянні". У цьому сенсі "абсолютні" оцінки є результатом порівняння деякої альтернативи з усіма можливими.

Ординарні оцінки альтернатив являють собою їх *ранги* (місця) у послідовності переваг за деяким критерієм.

Кардинальні оцінки – це числа, що вказують відносну значимість альтернатив, цілей або критеріїв у тому або іншому сенсі у певній шкалі.

Шкали зручно поділити на дві групи – для кількісної та якісної оцінки альтернатив.

Розглянемо основні шкали першої групи. Прикладами оцінок альтернатив в *абсолютній шкалі* є: кількість об'єктів, час виконання роботи, ймовірність реалізації альтернативи тощо. Прикладами оцінок у *шкалі відношень* можуть бути: вага товару у кілограмах, фунтах, пудах; довжина у метрах, футах, сажнях тощо. У *шкалі інтервалів* зберігаються відношення різниць оцінок, початок відліку й масштаб можуть змінюватись (значення температури у шкалах Цельсія, Фаренгейта, Кельвіна).

Для представлення якісних оцінок використовується номінальна шкала, шкали порядку й гіперпорядку. Оцінки у *номінальній шкалі* являють собою номери класів еквівалентності, у які були включені альтернативи у результаті їх класифікації (представлення множини студентів номером навчальної групи, потоку, спеціальності тощо). У *порядковій шкалі* представляються ординарні оцінки альтернатив, що відображають лише порядок альтернатив у ряду переваг за деяким критерієм (наприклад, "важливості", "корисності" тощо). У *шкалі гіперпорядку* зберігаються не лише порядок альтернатив, але й відношення порядку між різницями їх оцінок.

При розробці методів обробки експертної інформації необхідно враховувати психофізіологічні властивості людей, особливості їх поведінки у процесі прийняття колективних оцінок, особливості пам'яті людини.

Найбільш обґрунтованою експериментальними даними у даний час є так звана трьохкомпонентна модель пам'яті. Відповідно цій моделі розрізняють три види пам'яті: сенсорну, короткострокову й довгострокову (так же, як і у комп'ютері: регістри прийому інформації, оперативна пам'ять й пам'ять на зовнішніх носіях). Різноманіття видів пам'яті проявляється в об'ємі інформації, що зберігається, часу збереження й способі кодування. У *сенсорну* пам'ять інформація поступає від органів чуття й зберігається у ній біля третини секунди. Із сенсорної пам'яті інформація переписується у *короткострокову* пам'ять, де вона зберігається до 30 секунд й обробляється. Потім інформація або губиться, або поступає у *довгострокову* пам'ять з дуже великою ємністю і дуже великим часом зберігання (і ємність й час вважаються практично необмеженими).

Дослідження психологів показують, що процеси прийняття рішень відбуваються за участю саме короткострокової пам'яті, у яку інформація може поступати із сенсорної та довгострокової. Об'єм короткострокової пам'яті обмежений 7 ± 2 одиницями (у залежності від індивідуума), які називаються *чанками*. При цьому чанком може бути й простий символ, і складний образ, але важливо, що об'єкт, який описується чанком, сприймається людиною як єдиний образ. При порівнянні об'єктів (альтернатив, критеріїв) кожен з них описується чанком. Тому при розробці методів підтримки прийняття рішень число об'єктів, які повинен порівнювати експерт, необхідно обмежити цим "магічним" числом 7 ± 2.

Значний теоретичний та практичний інтерес мають оцінки виконання елементарних операцій, що використовуються у методах підтримки прийняття рішень (табл. 3.1):

"*Складні*" (С), при виконанні яких ОПР допускає багато протиріч, використовує спрощені стратегії (наприклад, виключає частину альтернатив чи критеріїв).

"*Допустимі*" (Д), ОПР може виконувати їх з малими протиріччями та з використанням складних стратегій.

"*Допустимі при малій розмірності*" (ДМ), при невеликій кількості об'єктів ОПР виконує їх достатньо надійно.

"*Невизначені*" (Н), ОПР може винести лише попередні висновки про допустимість (матимемо тип оцінки НД) або складності (тип оцінки НС) операції.

Особливо потрібно акцентувати увагу на психологічних аспектах прийняття колективних (групових) рішень. Основи теорії “групової свідомості” були вперше сформульовані у 1971 р. Ірвіном Янісом (Janis). Основні ознаки групової свідомості зводяться до наступного: належність до конкретної групи, ізоляція від інших; “стереотипування” інших – інші не розуміють їх; тиск на інакомислячих; загроза групі; ілюзія невразливості, ілюзія одностайності і т.д.

Експериментально доведено, що на ефективність групової свідомості впливають одностайність групи й колективна загроза. Якість групового рішення є гіршим в умовах сильної загрози й сильної одностайності й слабої загрози й слабої одностайності, ніж в умовах сильної загрози й слабої одностайності або слабої загрози й сильної одностайності.

Таблиця 3.1

№	Назва елементарної операції	**Оцінка**
1	**Операції з критеріями**	
1.1	Впорядкування за корисністю	НД
1.2	Призначення кількісних ваг критеріїв	С
1.3	Декомпозиція складного критерію на прості	ДМ
2	**Операції з оцінками альтернатив за критеріями**	
2.1	Кількісний еквівалент для якісної оцінки	НС
2.2	Побудова кривої корисності за критерієм	С
2.3	Якісне порівняння змін оцінок двох критеріїв	Д
2.4	Кількісне заміщення для двох критеріїв	НС
2.5	Визначення задовільного значення	НД
3	**Операції з альтернативами**	
3.1	Порівняння двох альтернатив як сукупності оцінок	ДМ
3.2	Порівняння двох альтернатив як цілісних об'єктів	НД
3.3	Знаходження ймовірнісних оцінок для альтернатив	С
3.4	Відношення альтернатив до класів рішень	ДМ
3.5	Кількісна оцінка корисності	С
3.6	Декомпозиція складної альтернативи на прості	ДМ
3.7	Призначення якісних оцінок ймовірностей	Д

Наслідком наявності ознак групової свідомості є прийняття “поганих” рішень. Існує декілька підходів до визначення мір утручання з метою компенсування групової свідомості. Так, наприклад, рекомендується запрошення експертів “ззовні”; запрошення “адвоката диявола” (тобто людини, яка помічає в інших лише недоліки); застосування методики “виконання декількох ролей” (членам групи пропонується поставити себе на місце інших); стимулювання інтелектуальної боротьби думок у групі, зокрема, захист думок меншості.

Найбільш розповсюдженими методами експертних оцінок прийняття рішень є:

- інтерв’ю,
- анкетування,
- мозкова атака,
- метод Дельфі.

Інтерв’ю

Опитування типу *інтерв'ю* передбачає розмову дослідника з експертом, у ході якої дослідник ставить питання у відповідності з розробленою програмою. До недоліків методу відносяться складність формалізації та високі вимоги до дослідника та експерта.

Мозкова атака

Деяка регламентація спілкування експертів у схемі круглого столу дозволяє уникнути вказаних недоліків. Відповідна модифікація називається *методом мозкового штурму* (мозкової атаки). Він полягає у тому, що на протязі деякого проміжку часу будь-яка висловлена думка не обговорюється і не відкидається. Обговорення висловлених думок здійснюється на наступних етапах після того, як кожен експерт встигає обдумати їх, зіставити із своєю.

Засновником даного методу є А. Осборн, який пропонував при колективній генерації нових ідей і рішень заборонити критику і проводити пошук послідовно в два етапи, двома групами. Перша група – «генератори» – пропонують ідеї, суворо дотримуючись правила «заборони критики». Друга група – «експерти» – обмірковують та аналізують ідеї, висунуті генераторами.

Метод «мозкової атаки» регламентується такими правилами:

- забороняється критична оцінка висунутих ідей (класичний варіант «мозкової атаки»);
- обмежується термін одного виступу;
- допускаються багаторазові виступи одного учасника;
- усі висловлені ідеї обов’язково фіксуються.

Як свідчить досвід використання методу «мозкової атаки», групове мислення генерує на 70 % більше цінних нових ідей, ніж сума індивідуальних мислень. В процесі «мозкової атаки» (віднесена оцінка) висувається від 50 до 150 різних ідей, тоді як під час індивідуальної роботи висувається приблизно 10–20 ідей. Для прикладу, компанія «Дженерал Електрік» за 30 хвилин сесії одержала 175 ідей розв’язання задачі оптимального з’єднання двох електроприводів.

Для зростання рівня результативності застосування методу мозкового штурму слід дотримуватись наступних етапів його проведення.

На сьогоднішній день в західних наукових дослідженнях і в практиці застосовується метод *“оптимізації мозкового штурму”*, за допомогою якого використовується *діаграми споріднення* (affinity diagram) замість кластеризації k-середніх. Результати моделювання свідчать, що оптимізаційний мозковий штурм є більш ефективним, ніж оригінальний метод.

Анкетування

Найчастіше застосовується форма опитування, що носить назву *анкетування*.

Анкета – це набір питань, на які пропонується відповісти експерту. Багатьма дослідженнями встановлено, що людина краще відповідає на "якісні" питання ("гірше-краще"), ніж на кількісні. Рекомендується спочатку формувати загальні питання, потім часткові.

Аналітична форма опитування передбачає тривалу самостійну роботу експерта, направлену на аналіз характерних властивостей і тенденцій системи, що досліджується. Таку форму називають *методом доповідної записки*. Форма доповідної записки часто застосовується як перший етап більш складної експертизи, що дозволяє уточнити напрям досліджень і зміст питань, що будуть задаватись на наступних етапах.

Виділяють три форми взаємодії експертів (параметр L):

1) експерти вільно обмінюються інформацією;
2) обмін інформацією між експертами регламентовано;
3) експерти ізольовані один від одного.

У схемі типу *круглого столу* взаємодія між експертами не регламентована. У процесі обговорення проблеми експерти вільно обмінюються думками, збагачуючись ідеями один одного. Негативний бік, обумовлений підвищеними вимогами до експертів: уміння висловити думку, що не залежить від думки більшості; здатність відмовитись від свого погляду, якщо він виявиться невірним.

Існує певна ієрархія розміщення питань в анкеті в залежності від їх складності. Спочатку розміщують питання більш прості, на які зможе легко і без проблем дати відповідь, після розміщуються складні питання, а найскладніші знаходяться уже в кінці списку питань. Таке подання питань дозволяє експерту поступово втягнутись в роботу для підготовки відповідей на питання анкети. Окрім ієрархії розміщення питань, існують їх види та типи.

Щодо основних завдань експертизи, то нагадаємо їх напрямки:

1. Оцінка відносної важливості протягом досліджуваного періоду параметрів, факторів, показників тощо;

2. Оцінка терміну здійснення подій у досліджуваній проблемі;

3. Оцінка питомої ваги (співвідношень) різних видів науково-технічних і економічних рішень, засобів, завдань і т.д.

4. Оцінка кількісних характеристик технічних засобів, параметрів, економічних показників, які можуть бути досягненні у майбутньому у певні періоди часу;

5. Оцінка бажаності або необхідності здійснення певних подій у майбутньому для досягнення поставленої мети

Вид питання	Тип питання	Приклад
Питання, відповідь на яке містить кількісну оцінку	Оцінюючий: час настання деякої події ймовірність здійснення події кількісне значення прогнозованої характеристики об'єкта вплив факторів один на одного по деякій шкалі	Коли буде створено перший зразок об'єкта? Яка ймовірність того, що до 2020р. буде створений об'єкт із заданими характеристиками? Яке буде максимальне значення прогнозованої характеристики об'єкта до 2020р.?
Питання, що вимагає змістовної відповіді у стислій формі	Варіантний (вибирається альтернатива)	Які з перерахованих нижче змін у структурі об'єкта відбудуться, якщо буде здійснено принцип А, або В, або С, або ...?
Питання, що вимагає змістовної відповіді в розгорнутій формі	Вимагає відповіді у вигляді: переліку відомостей про об'єкт переліку аргументів, які підтверджують тезу, що міститься в питанні	Які характерні особливості об'єкта? Які ваші аргументи на користь доцільності розвитку об'єкта?

В цілому, заповнені експертами опитувальні анкети і таблиці є, свого роду, інформаційним забезпеченням методу експертного оцінювання Дельфі.

Метод Делфі

Даний метод є добре структурованим, який спочатку розвивався як систематичний та інтерактивний метод прогнозування, що ґрунтується на думках групи експертів. Метод Делфі належить до суб'єктивно-інтуїтивних методів передбачення. Вперше метод був розроблений в 40-х роках корпорацією Rand, Санта Моніка, штат Каліфорнія для операційних досліджень.

Метод Делфі базується на структурованому опитуванні та використанні зрозумілої і доступної інформації про учасників опитування, які являються експертами. Тому метод надає як якісні, так і кількісні результативні показники з нормативними елементами в прогнозуванні. Існує декілька варіантів методології використання Делфі. Метод Дельфі характеризується трьома особливостями, що вирізняє його від інших методів колективної експертної оцінки: а) анонімністю; б) регульованим зворотним зв’язком; в) статистичною обробкою даних експертизи.

Експертам пропонується відповісти на ряд питань й свої відповіді аргументувати. Аналітик вивчає відповіді експертів і визначає їх узгодженість. Якщо думки експертів недостатньо узгоджені, то він повідомляє кожному з них додаткові відомості про систему, а також відповіді на поставлені питання та аргументації інших членів експертної групи. З врахуванням отриманої інформації експерти знову відповідають на сформульовані питання. Недоліком методу є великі витрати часу на проведення всіх турів опитування й велика трудомісткість процедури, що пов'язана з переглядом думок експертів.

Тому в 1988 році був запропонований слабо структурований метод Дельфі (Fuzzy Delphi Method), який є узагальненим до класичного методу Делфі.

Спочатку визначається число експертів – воно повинно бути достатньо великим для того, щоб були всебічно враховані суттєві властивості задачі, з іншого боку, при занадто великій кількості експертів виникають труднощі в організації процедури. Доцільно організовувати групу з 10-20 експертів, хоча можливі відхилення як у більшу, так й меншу сторону.

Коли чисельність групи визначена, переходять до підбору експертів. Для цього визначають перелік задач, що потребують розв'язання, і складають список осіб, що є компетентними спеціалістами у даній (або близьких до даної) області. Крім *компетентності*, хороший експерт повинен мати ще цілий ряд якостей. Основні з них наступні: *креативність* – здатність розв'язувати задачі, метод розв'язку котрих, повністю або частково невідомий; *евристичність* – здатність виявляти неочевидні проблеми; *інтуїція* – здатність "вгадувати" розв'язок без його обґрунтування; *предикатність* – здатність "передбачати" розв'язок; *незалежність* –

здатність протистояти думці більшості; *всебічність* – здатність бачити проблему з різних точок зору.

Вимоги до експертів залежать також від методу організації експертизи. Так, при роботі експерта у комісії, де експерти вступають у безпосередній контакт, важливе значення набувають психологічні фактори, у першу чергу, сумісність, незалежність. Необхідно враховувати також зацікавленість експерта у результаті експертизи.

В деяких випадках при підборі експертів використовують числові оцінки, що характеризують їх якості. Такі оцінки носять або статистичний характер, або ґрунтуються на результатах психології та соціоніки. Після визначення групи експертів застосування методу Делфі передбачає проходження наступних етапів:

Етап 1. Експерти надають прогнозовану дату та час вирішення поставленої проблеми, тобто модератору надаються приблизний прогнозований термін настання певної події або оптимальної величини певного параметра.

Етап 2. Експерти повинні в письмовій формі оцінити ймовірність реалізації подій. Ймовірні оцінки повинні бути скомпоновані і подані у вигляді моди, квартилів і медіан. Суть даних показників розкрито нижче в описі статистичної обробки інформації.

Етап 3. Ознайомившись з результатами статистичної обробки даних анкетного опитування, експерти, чиї оцінки мають «крайні» значення, тобто не попали в інтервал довіри, можуть при бажанні ввести відповідні корективи у свої попередні оцінки, або при незмінності своєї позиції, на прохання організаторів експертизи, обґрунтувати свою точку зору і пояснити причини розбіжностей з думками більшості групи.

Етап 4. Після певних повторів етапів 2 і 3 в разі досягнення узгодженості думок експертів приймається рішення щодо поставленої проблеми. Пізніше прийнятий прогноз може бути переглянутий повторно, пройшовши всі етапи, в разі виникнення нової важливої інформації або виявлення неправильних тлумачень.

Методи обробки експертної інформації. Отримана в результаті анкетного опитування інформація є вхідним матеріалом для статистичної її обробки та виведення кінцевих результатів щодо поставленої проблеми.

Методи обробки експертної інформації поділяються на три основні групи: статистичні методи, алгебраїчні методи й методи шкалювання. *Статистичні методи* базуються на припущенні, що відхилення оцінок експертів від істинних значень відбувається у силу випадкових причин. Суть *алгебраїчних методів* полягає у наступному: на множині допустимих оцінок задається відстань й результуюча оцінка визначається як така, відстань якої до оцінок експертів (за певним критерієм) мінімальна. Ідея *методів шкалювання* полягає у тому, що за експертною інформацією про степінь відмінності об'єктів установлюється мінімальний (або близький до мінімального) набір критеріїв та оцінок об'єктів за цими критеріями, що обумовлюють вказані експертами відмінності.

При статистичній обробці даних розраховують такі показники, як мода, медіана, верхній та нижній квартилі.

Мода – це величина, яка найчастіше зустрічається у вибірковій сукупності:

$$\boldsymbol{Mo = x_{M_o} + i_{M_o}\frac{(f_{Mo} - f_{Mo-1})}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}} \tag{3.9}$$

де x_{Mo} – мінімальне значення модального інтервалу (модальним вважається інтервал з найбільшою частотою; i_{Mo} – розмір модального інтервалу; f_{Mo}; f_{Mo-1}; f_{Mo+1} – відповідно значення частот модального інтервалу.

Медіана – це величина, яка ділить ряд розподілу на дві рівні частини і відповідає середньому члену ряду, побудованого в порядку зростання (ранжируваний ряд). Медіана показує величину варіаційної ознаки, якої досягла половина одиниць сукупності. Медіана в інтервальному ряду розраховується за формулою:

$$\boldsymbol{Me = x_{Me} + i_{Me}\frac{\sum f/_2 - S_{Me-1}}{f_{Me}}} \tag{3.10}$$

де x_{Me} – мінімальне значення медіанного інтервалу (медіанним вважається інтервал, в якому кумулятивна сума частот дорівнює або перевищує половину суми частот, тобто $f_i'' \geq \sum f/_2$), i_{Me} – частота медіанного інтервалу; $\sum f$ – сума частот (кількість експертів); f_{Me} – частота медіанного інтервалу.

$$\boldsymbol{f_i'' = f_{i-1}'' + f_i} \tag{3.11}$$

Квартилі – це значення ознаки, які ділять сукупність на чотири рівновеликі чистини. Розрізняють квартиль нижній, який відділяє 1/4 сукупності з найменшими значеннями ознаки, і квартиль верхній, який відділяє 1/4 з найбільшими значення ознаки. Це означає, що 25% одиниць сукупності буде менше за величину Q_1; 25% одиниць будуть знаходитись між Q_1 і Q_2; 25% між Q_2 і Q_3 та решта 25% перевищує Q_3. Середнім квартилем Q_2 є *медіана*.

Нижній квартиль (Q_1) і верхній квартиль (Q_3) інтервального ряду розраховується відповілно за формулами:

$$\boldsymbol{Q_1 = X_{Q_1} + i\,\frac{0.25\sum f - S_{Q_1-1}}{f_{Q_1}}} \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{Q_1 = X_{Q_3} + i\,\frac{0.75\sum f - S_{Q_3-1}}{f_{Q_3}}} \tag{3.13}$$

де X_{Q_1} – нижня межа інтервалу, яка містить нижній квартиль (інтервал визначається за накопичувальною частотою, що перша перевищує 25%), X_{Q_3} – нижня межа інтервалу, яка містить верхній квартиль (інтервал визначається за накопичувальною частотою, що перша перевищує 75%), i – величина інтервалу, S_{Q_1-1} – накопичувальна частота інтервалу, яка передує інтервалу, що містить нижній квартиль, S_{Q_3-3} – накопичувальна частота інтервалу, яка передує інтервалу, що містить верхній квартиль, f_{Q_1} – частота інтервалу, який містить нижній квартиль, f_{Q_3} – частота інтервалу, який містить верхній квартиль.

Отже, медіана і квартиль ділять упорядкований ряд чисел на чотири частини. Прийнято вважати, що медіана характеризує узагальнену думку групи експертів, а «крайні» значення оцінок, що потрапили за межі верхнього квартиля і нижнього квартиля, знаходяться поза інтервалом довіри.

Очевидно не буде помилкою, коли для кінцевого розрахунку часу настання певної події або визначення кількісного значення показника, скористатись методикою СПУ (сіткове планування і управління) щодо оцінки трудомісткості:

$$\boldsymbol{T_{o\text{ч}} = \frac{T_{min} + 2T_{\text{н.і.}} + T_{max}}{4}} \tag{3.14}$$

де $T_{оч}$ – очікуване значення показника (математично очікуваний розподіл); $T_{н.і.}$ – найбільш ймовірне значення показника (можна використовувати моду і медіану); T_{mix}, T_{max} – відповідно мінімальне і максимальне значення показника у сукупності даних.

Важливим етапом оцінки результатів анкетування є оцінка питомої ваги різних варіантів рішень. Одним із розповсюджених методів оцінки питомої ваги показників є використання гістограм. Шкала гістограми приймається в межах від 0 до 100% і ділиться на декілька частин, наприклад 5 рівних частин. Ширина кожного інтервалу становить 20%. Висота стовпця гістограми пропорційна питомій вазі (%) числу оцінок всередині певного інтервалу. Кожна оцінка в певному інтервалі без врахування компетентності експерта приймається за 1. При здійсненні підрахунку кількості оцінок з урахуванням компетентності, кожній оцінці присвоюється значення коефіцієнта компетентності K відповідного експерта. Значення оцінок певного інтервалу додаються. В кінцевому результаті визначається питома вага (%) всіх оцінок, що містяться у цьому інтервалі у сумі значень всіх оцінок по певному питанню.

Однією з розповсюджених напрямів використання експертних оцінок є *оцінка порівняльної важливості окремих факторів* (параметрів, ознак, показників тощо) у процесі прийняття рішення, в ході якої передбачається виконання двох етапів:

1. Оцінити сукупність показників, які характеризують об'єкт дослідження;

2. Оцінити узгодженість думок експертів щодо поставленої проблеми.

1. Оцінка експертом відносної важливості факторів здійснюється, як правила, шляхом присвоєння їм деякої кількості балів в межах від 0 до 100: 0 – якщо фактор, на думку експерта, не має суттєвого значення; 100 – має найважливіше значення.

При обробці матеріалів колективної експертної оцінки відносної ваги окремих факторів нарівні з балами використовуються ранги. Тому дані, отримані в балах, відповідним чином піддаються ранжуванню. Для цього кожен експерт групи повинен оцінити показник кожної ознаки, в результаті чого може бути заповнена таблиця (табл. 3.2). При цьому, порядковий номер, що визначає місце кожного фактору у загальній сукупності факторів, називається *рангом.* Ранги відповідають числам натурального ряду 1, 2, 3, ..., r, де r – кількість ранжованих факторів. 1 – присвоюється найбільш важливому фактору, 0 – найменш важливому.

Таблиця 3.2

Матриця балів

№ експерта	Фактор					
	1	2	...	j	...	m
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1m}
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2m}
i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{im}
.	.	.	.	.	.	.
n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nj}	...	C_{nm}

де m – кількість експертів, що взяли участь в груповому оцінюванні; 1, 2, 3, ..., i, ..., m – можливі номера експертів; n – кількість факторів; 1, 2, 3, …, i, …, n – можливі номера факторів; m_j – кількість експертів, що оцінили j-ий фактор; m_{100j} – кількість максимально можливих оцінок (100 балів), отриманих j-м фактором; C_{ij} – оцінка вартості відносної ваги (в балах) наданої i-м експертом j-му фактору.

Для ранжування оцінок матриця балів перетворюється в матрицю рангів (R_{ij}) – це ранг оцінки i-м експертом j-го фактору (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Матриця рангів

№ експерта	Фактор					
	1	2	...	j	...	m
1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1j}	...	R_{1m}
2	R_{21}	R_{22}	...	R_{2j}	...	R_{2m}
i	R_{i1}	R_{i2}	...	R_{ij}	...	R_{im}
.	.	.	.	.	.	.
n	R_{n1}	R_{n2}	...	R_{nj}	...	R_{nm}

Сума рангів, призначених експертами j-му фактору, визначається за формулою:

$$\boldsymbol{S_j = \sum_{i=1}^{m} R_{ij}} \qquad (3.15)$$

Чим менша сума рангів, тим важливішим є певний фактор.

Відповідно, середній ранг для кожного фактору визначається:

$$\bar{S}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_{ij}}{m} = \frac{S_j}{m} \quad (3.16)$$

При порівнянні відносної важливості різних факторів за $\bar{S}_j$ найбільш важливим слід вважати той фактор, який має найменше значення середньої величини рангу.

Разом з розрахунком середніх рангів для кожного фактору визначається середня величина в балах:

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} C_{ij}}{m_j} \quad (3.17)$$

$M_j \in [0; 100]$. Відповідно, чим більше значення показника, тим вища відносна важливість фактору.

Наприклад. ранжування показників на підставі отриманої бальної оцінки окремих факторів: 100, 90, 90, 90, 80, 60, 50, 50, 40.

Ранжування показників на підставі бальних оцінок

Показник	фактори								
Бальна оцінка	100	90	90	90	80	60	50	50	40
Займане місце	1	2-4	2-4	2-4	5	6	7-8	7-8	9
Стандартизований ранг	1	3	3	3	5	6	7.5	7.5	9

Стандартизовані ранги отримані таким чином: 3 = (2 + 3 + 4) : 3; 7,5 = (7 + 8) : 2.

Частота максимально можливих оцінок (100 балів) кожного фактору розраховується:

$$K_{100j} = \frac{m_{100j}}{m_j} \quad (3.18)$$

$K_{100j} \in [0; 1]$. Важливість j-го фактору зростає при збільшенні K_j від 0 до 1. Даний показник є додатковим оцінки важливості факторів. Перевагу тому чи іншому фактору слід віддавати, в першу чергу, в залежності від середніх величин рангу чи балів.

Активність експертів по кожному напрямку обчислюється за допомогою коефіцієнта активності:

$$\boldsymbol{K_{aej} = \frac{m_j}{m}} \tag{3.19}$$

де K_{aej} – коефіцієнт активності експертів по j-му фактору; m_j – кількість експертів, що оцінили j-й фактор;
m – загальна кількість експертів.

Зазвичай, оцінки факторів експертами різняться, тому доцільно обчислювати показник *розмаху оцінок:*

$$\boldsymbol{L_j = C_{jmax} - C_{jmin}} \tag{3.20}$$

де L_j – розмах оцінок (в балах) j-го фактору;

C_{jmax}, C_{jmin} – максимальна і мінімальна оцінки j-го фактору.

Крім наведених вище абсолютних і середніх величин оцінки важливості фактора при обробці даних опитувальних анкет обчислюються також відносні показники, зокрема середня вага. Спочатку проводиться нормалізація (перехід від абсолютних до відносних величин) показників по кожному фактору, а потім розраховується середньозважена величина.

Середня вага фактору (нормалізована оцінка) розраховується:

$$\boldsymbol{w_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} W_{ij}}}; \qquad \boldsymbol{w_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} C_{ij}}} \tag{3.21}$$

де w_{ij} – вага (нормалізована оцінка), надана і-м експертом j-му фактору; w_j – загальна вага, надана експертами j-му фактору.

Оскільки сума відносних значень, поставлених кожним експертом всім факторам, дорівнює 1, то $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ij}$ дорівнює кількості експертів, що беруть участь в експертизі.

У випадку, коли експерт надає однакову кількість балів декільком факторам, то іншим присвоюється стандартизовані ранги.

Стандартизований ранг – це частка виділення суми місць, зайнятих факторами з однаковими рангами, на загальну кількість таких альтернатив.

Таким чином, оператори експертизи повинні зі сукупності факторів відібрати лише найвагоміші з них, проаналізувавши розрахунки показників, що наведені вище.

Базуючись на зведених даних таблиці проводиться оцінка ступеня узгодженості проанкетованих експертів.

Ступінь узгодженості думок експертів визначається за допомогою *“коефіцієнта конкордації”* W, що визначається нижче. Розглянемо два крайніх випадки:

1) ранжування всіх експертів співпадають;

2) усі ранжування відмінні (вважаємо, що $n < m$!).

У випадку відсутності однакових (стандартизованих) рангів коефіцієнт конкордації розраховується за такою формулою:

$$W = \frac{12 \sum_{j=1}^{n} d_j^2}{m^2(n^3 - n)} \tag{3.22}$$

За наявності однакових (стандартизованих) рангів коефіцієнт конкордації розраховується за формулою:

$$W = \frac{12 \sum_{j=1}^{n} d_j^2}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{i=1}^{m} T_i} \tag{3.23}$$

де

$$d_j = S_j - \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{n} \tag{3.24}$$

$$S_j = \sum_{i=1}^{m} R_{ij} \tag{3.25}$$

$$T_j = \sum_{l=1}^{L} (t_l^3 - t_l) \tag{3.26}$$

l – кількість груп зв'язаних (однакових) рангів;

t_l – кількість зв'язаних рангів у кожній групі;

d_j - відхилення суми від середньої суми;

S_j – сума рангів.

В разі повного співпадіння думок експертів ***W = 1***, а при повній відмінності ***W=0***. В решті випадках ***0<W<1***.

Наближення **W = 0.05/0.10** свідчить про те, що склад групи експертів підібраний невдало або об'єкт дослідження недостатньо вивчений. І, навпаки, при ***W≥0.9***, може виявитись, що експертиза проведена без належного вивчення проблеми. В обох випадках експертизу слід зробити повторно.

Значимість коефіцієнту конкордації *W* (відмінність від 0) перевіряється за допомогою *z-критерію Фішера*:

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{2} ln \frac{(n-1)W}{1-W}}.$$

Окрім критерію Фішера статистична істотність коефіцієнта конкордації перевіряється за *критерієм Пірсона* (χ^2):

$$\boldsymbol{\chi_p^2} = \frac{\boldsymbol{12 * \sum_{j=1}^{n} d^2}}{\left[\boldsymbol{mn(n+1) - \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{m} T_i}\right]} \tag{3.27}$$

де χ_p^2 – розрахункове значення Пірсона.

Розрахункове значення $\chi_р^2$ зіставляють з табличним значення $\chi_т^2$ для *n-1* ступенів свободи та довірчої ймовірності *(P = 0,95* або *P = 0,99*). Якщо $\chi_р^2 > \chi_т^2$, то коефіцієнт конкордації *істотний*, якщо ж $\chi_р^2 < \chi_т^2$, то необхідно збільшити кількість експертів.

Розсіювання думок експертів, рівень якого по суті відображає узгодженість думок експертів, крім коефіцієнта конкордації, оцінюється також статистичними показниками, зокрема:

а) дисперсія оцінок, поставлених j-му напрямку

б) коефіцієнт варіації оцінок, даних j-му напрямку

в) загальна дисперсія оцінок

г) загальна дисперсія рангів.

Значні статистичні можливості надає побудова *матриці переваг* на основі матриці рангів.

Наприклад. Для визначення елементу 1/2 (клітинка на перетині 1-го рядка та 2-го стовпця) матриці переваг аналізуються рядки 1 та 2 матриці рангів і визначається, скільки разів елементи першого рядка менші елементів другого рядка; для розрахунку елемента 1/3 порівнюють рядки 1 та 3 матриці рангів, а потім виконують ті ж дії, що і вище, і т.д.; для розрахунків елементів матриці переваг 2/1; 2/3; 2/4 порівнюють елементи матриці рангів 2-го рядка послідовно з 1-м, 3-м, 4-м рядками. Подальші дії аналогічні розрахункам першого рядка матриці переваг.

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

Приклади застосування експертних систем прийняття рішень

Експертна оцінка літаків

Розглянемо приклад методу експертних оцінок:

1. Порівняємо літаки Боїнг, Туполєв, аеробус, бомбардир, АН.
2. Виберемо параметри порівняння.

Параметрів бажано вибрати не менше 4 і не більше 7, тому що більшу кількість параметрів викликає дефокусування і відсутність чіткого розуміння результату. Те ж саме і з кількістю порівнюваних об'єктів – від 4 до 7.

№	Параметр	Вага	А (Боїнг)	Б (Туполєв)	В (Аеробус)	Г (Бомбардир)	Д (АН)
1	Магістральна дальність						
2	Місткість						
3	Витрати палива V						
4	Комфорт						
5	Вартість експлуатації						
	Сума	1					

Далі необхідно бали помножити на вагу даного параметра. В останній стовпець "Е" ставиться максимальне значення з одержаних чисел. У рядку "Сума" складаємо суму "ваг" параметрів для кожного літака.

Таким чином, літак "В" виявився найефективнішим. Далі ми вже аналізуємо, чи треба купувати літак В, який виявився ефективним, або, наприклад, розглянути можливість купівлі літака Г з найменшими експлуатаційними витратами, так як саме цей параметр найважливіший.

№	Параметр	Вага	А (Боїнг)	Б (Туполєв)	В (Аеробус)	Г (Бомбардир)	Д (АН)	Е
1	Магістральна дальність	0,2	9*0,2 = 1,8	6 *0,2 = 1,2	10*0,2 = 2	8*0,2 = 1,6	7*0,2 = 1,4	2
2	Місткість	0,15	7*0,15 = 1,1	10*0,15 = 1,5	10*0,15 = 1,5	6*0,15 = 0,9	8*0,15 = 1,2	1,5
3	Витрати палива V	0,25	8*0,25 = 2	7*0,25 = 1,75	9*0,25 = 2,25	9*0,25 = 2,25	8*0,25 =2	2,25
4	Комфорт	0,15	10*0,15 = 1,5	8*0,15 = 1,2	9*0,15 = 1,35	8*0,15 = 1,2	7*0,15 = 1,1	1,5
5	Вартість експлуатації	0,25	6*0,25 = 1,5	8*0,25 = 2	9*0,25 = 2,25	10*0,25= 2,5	8*0,25 =2	2,5
	Сума	1	7,9	7,65	9,35	8,46	7,7	

Застосування методу Делфі в експертній оцінці

Для проведення експертної оцінки впливу факторів на підвищення продуктивності праці в підприємстві було обрано 4 експерти. Нижче наведені зведені дані з опитувальних анкет з балами оцінки кожного з десяти факторів кожним експертом (табл.3.4):

Таблиця 3.4

	Кількість балів			
Фактор	1-й експерт	2-й експерт	3-й експерт	4-й експерт
1	100	100	90	80
2	90	100	80	100
3	90	80	100	90
4	90	70	70	70
5	70	90	50	60
6	80	60	60	50
7	50	60	40	50
8	50	60	30	40
9	40	50	20	0
10	60	50	10	20

Наступним кроком є ранжування факторів (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

	Кількість балів			
Фактор	1-й експерт	2-й експерт	3-й експерт	4-й експерт
1	1	1.5	2	3
2	3	1.5	3	1
3	3	4	1	2
4	3	5	4	4
5	6	3	6	5
6	5	7	5	6.5
7	8.5	7	7	6.5
8	8.5	7	8	8
9	10	9.5	9	10
10	7	9.5	10	9

Сума рангів розраховується по рядкам табл. 3.5 для всіх факторів і зростає вона по мірі зниження відносної важливості досліджуваних факторів. Зрозуміло, що чим менша сума рангів, тим важливіший певний фактор.

При порівнянні відносної важливості різних факторів за середнім рангом для кожного фактора (формула 3.16) найбільш важливим слід вважати фактор, що характеризується найменшим значенням

, середньої величини рангу.

Водночас, з середніми рангами для кожного з відібраних факторів визначається середня величина в балах (формула 3.17), яка приймає значення від 0 до 100 залежно від того, яку оцінку відповідно з важливістю дали експерти тому чи іншому фактору. Відповідно, чим більше значення M_j, тим вищою є відносна важливість фактору.

Примітка. При визначенні середнього значення в балах, враховується тільки та кількість експертів, котра дала оцінку певному напрямку. Тому, згідно даних матриці балів (табл. 3.2), при розрахунках середнього значення в балах для дев’ятого фактора враховується лише три експерти.

Окрім вище наведених показників оцінки відносної важливості факторів, можна застосовувати додаткові. Наприклад, зростання важливості окремого фактора є прямо пропорційному зростанню показника частоти максимально можливих оцінок K_{100j} (формула 3.18) від 0 до 1.

Після обчислення абсолютних і середніх величин обчислюємо відносні показники. Для цього абсолютні показники переводимо у відносні шляхом нормування (формула 3.21):

за даними таблиці 3.2 матимемо:

w_{11} = 100 : (100+90+90+90+70 + 80 + 50 + 50 + 40 + 60) = 1,139;

w_{21} = 100 : (100+90+90+90+70+80+50+50+40+60) = 0,125;

w_{31} = 90 : (100+90+90+90+70+80+50+50+50+40) = 0,125.

Аналогічно для кожного наступного фактора (табл.3.6).

Таблиця 3.6

Матриця відносного значення факторів

Фактори	Експерти			
	1	2	3	4
1	0,139	0,139	0,164	0,143
2	0,125	0,139	0,145	0,179
3	0,125	0,111	0,182	0,161
4	0,125	0,097	0,127	0,125
5	0,097	0,125	0,091	0,107
6	0,111	0,083	0,109	0,089
7	0,069	0,083	0,073	0,089
8	0,069	0,083	0,055	0,071
9	0,056	0,069	0,036	0,000
10	0,083	0,069	0,018	0,036

Відомо, що сума відносних значень, поставлених кожним експертом всім факторам, дорівнює 1, а $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} W_{ij}$ дорівнює кількості експертів, то:

w_1 = (0,139 + 0,139 + 0,164 + 0,143) : 4 = 0,146

w_2 = (0,125 + 0,139 + 0,145 + 0,179) : 4 = 0,147

аналогічно для решти факторів.

Таблиця 3.7

Зведена таблиця показників порівняльної важливості факторів

Показник	Умовні позначення	Фактори (параметри, напрямки)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сума рангів	S_j	7,5	8,5	10,0	16,0	20	23,5	29,0	31,5	38,5	35,5
Середній ранг	S_j	1,88	2,13	2,50	4,00	5,00	5,88	7.25	7,88	9,63	8,88
Середнє значення в балах	M_j	92,5	92,5	90,0	75,0	67,5	62,5	50,0	45,0	36,7	35,0
Частота максимально можливих оцінок	$K_{100\,j}$	0,50	0,50	0,25	0	0	0	0	0	0	0
Середня вага (нормована оцінка)	w_j	0,15	0,15	0,15	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07	0,04	0,05
Коефіцієнт активності експертів	K_{aej}	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,75	1,00
Розмах	L_j	20	20	20	20	40	30	20	30	50	5

Оцінка показників відносної важливості факторів свідчить, що група експертів віддала перевагу першому і другому факторам і менш схильні вважати доцільними 10-й і 9-й фактори.

Величина розмаху показує, за виключенням 5-го, 9- го та 10-го факторів, що особливого значення цього розмаху в оцінках експертів не спостерігається. За значенням показника активності експертів можна судити: з одного боку, про компетентність експертів; з другого боку, про те, що фактори досить обґрунтовані, оскільки всі експерти дали оцінку запропонованим факторам (за винятком 9-го фактора). Показники частоти максимально можливих оцінок свідчать, що тільки для перших трьох факторів експерти поставили 100-бальну оцінку. Таким чином, організатори експертизи повинні із сукупності факторів відібрати перші два–три, співставити їх та шляхом додаткових оцінок, наприклад, мозковою атакою вибрати найпростіший фактор.

Для визначення коефіцієнта узгодженості думок експертів (формула 3.22) та за даними матриці рангів (табл. 3.3) кількість груп зв'язаних (однакових) рангів $l = 6$: (3; 3; 3); (8,5; 8,5); (1,5;1,5); (3,3; 3); (7; 7; 7); (9,5; 9,5); (6,5; 6,5).

Звідси кількість зв'язаних рангів у кожній групі:
$t_{l1} = 3$; $t_{l2} = 2$; $t_{l3} = 2$; $t_{l4} = 3$; $t_{l5} = 2$; $t_{l6} = 2$.

Проміжні показники для розрахунку коефіцієнта конкордації наведено в таблиці 3.8:

Таблиця 3.8

Проміжні розрахунки для визначення коефіцієнта конкордації на основі даних матриці рангів

Фактори	Експерти				Сума рангів, S_j	Відхилення суми від середньої суми, d_j	d_j^2
	1	2	3	4			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1,5	2	3	7,5	–14,5	210,25
2	3	1,5	3	1	8,5	–13,5	182,25
3	3	4	1	2	10,0	–12,0	144,0
4	3	5	4	4	16,0	–6,0	36,00
5	6	3	6	5	20,0	–2,0	4,00
6	5	7	5	6,5	23,5	1,5	2,25
7	8,5	7	7	6,5	29,0	7,0	49,00
8	8,5	7	8	8	31,5	9,5	90,25
9	10	9,5	9	10	38,5	16,5	272,25
10	7	9,5	10	9	35,5	13,5	182,25
Разом	–	–	–	–	220,0	–	1172,50
Середнє значення	–	–	–	–	22,0	–	–

$T_j = (3^3 - 3)+(2^3 - 2)+(2^3 - 2)+(3^3 - 3)+(2^3 - 2)+(2^3 - 2)=72.$

Звідси, коефіцієнт конкордації (формула 3.23) становить:

$$W = \frac{12 * 1172{,}50}{[4^2(10^3 - 10) - 4 * 72]} = 0{,}905$$

Отримане значення коефіцієнта конкордації свідчить про високий ступінь узгодженості думок експертів.

Перевіримо показник на статистичну значимість за показником Персона (формула 3.27):

$$\chi_p^2 = \frac{12 * 1172{,}50}{\left[4 * 10(10 + 1) - \frac{1}{10 - 1} * 72\right]} = 32{,}57$$

Табличне значення $\chi_т^2 = 16.92$ при n = 10-1 ступенів свободи та довірчої ймовірності p = 0,95. Звідси $\chi_p^2 > \chi_т^2$, що свідчить про істотність показника конкордації.

Застосування методу експертних оцінок у моделюванні ефекту ефективності праці на якість продукції

Визначити вплив ефективності праці на якість продукції за допомогою моделі залежностей. Отриманим фактором моделі має стати зміна якості продукції в компанії, а фактори ефективності праці повинні сприйматися як незалежні змінні.

Предметом дослідження є мережа компаній “Делойт” (Deloitte Touche Tohmatsu Ltd), яка надає професійні послуги у сфері консалтингу та аудиту. “Делойт” входить до аудиторських компаній “Велика четвірка” (“Big Four”) і є найбільшою професійною мережею за кількістю працівників (225,000 чоловік). У 2015 році “Фортуна” (“Fortune”) включила “Делойт” в рейтинг 100 найвидатніших компаній світу, що свідчить про високу якість надання послуг та високого рівня управління в компанії.

В дослідженні визначені фактори, що визначають ефективність ресурсів підприємства шляхом вербального узагальнення:

- трудові відносини, що позначаються на відносинах співробітників компанії (мікроклімат в компанії, корпоративна культура, філософія компанії);
- умови праці (організація робочих місць та можливості працівників);
- матеріальна винагорода (заробітна плата, бонуси, премії, матеріальна допомога, соціальний пакет);
- система санкцій, що означає покарання за невиконання обов’язків (позбавлення бонусів, штрафів);
- професійний розвиток співробітників компанії;
- особисті мотиви працівників компанії (самореалізація, досвід).

Основний метод дослідження, обраний для визначення ступеня зміни якості продукції, що впливає на коефіцієнти ефективності праці, був представлений методом експертної оцінки. Використання колективної експертної оцінки є найбільш практичним, оскільки цей метод, на відміну від окремих оцінок, дає змогу отримати більш об'єктивну інформацію.

Оскільки якість експертної оцінки залежить від професійних досягнень експертів, від їх знань та навичок, початковий етап експертної оцінки передбачає оцінку компетенцій фахівців у сфері управління трудовими ресурсами шляхом визначення коефіцієнту компетенції (формула 3.8).

Експерти були представлені керівником відділу людських ресурсів головного офісу компанії “Делойт”, що розташована у

Великобританії. Щоб звести до мінімуму можливість помилкових суджень експертів, команда була сформована з 20 керівників, чий коефіцієнт компетенції становив 1.

Експертам було запропоновано оцінити значення факторів для підвищення якості продукції з використанням 5-бальної шкали та з урахуванням підвищення ефективності праці:

1 – найменший показник ефективності праці;

5 – найвищий показник ефективності праці.

Спираючись на узагальненій оцінці експертів, пріоритетні фактори (w_i^*) був знайдений разом з нормалізованим пріоритетними факторами, який вказує на значимість факторів:

$$w_i^* = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{ij}}{m}$$

де e_{ij} – оцінка значущості фактора w_i експертом m (від 1–5); m – чисельність експертів.

Результати експертних оцінок представлені в таблиці 3.3.

Оцінка значення показника ефективності праці уможливлює побудувати модель зміни якості продукції залежно від підвищення ефективності праці:

$$\Delta Q = \sum w_i^* * F_i \qquad (3.28)$$

$$\Delta Q = 0.08 * F_1 + 0.21 * F_2 + 0.24 * F_3 + 0.18 * F_4 +$$
$$+0.11 * F_5 + 0.13 * F_6 + \varepsilon_F$$

де ε_F – ефект факторів, що не були включені в модель (F_7).

Таблиця 3.9

Значення ефекту ефективності праці на якість продукції

Фактор	w_i	w_i^*
Відносини між працівниками (F_1)	1.6	0.08
Умови праці (F_2)	4.35	0.21
Матеріальна винагорода (F_3)	4.85	0.24
Система санкцій (F_4)	3.7	0.18
Професійний розвиток (F_5)	2.25	0.11
Мотивація працівників (F_6)	2.7	0.13
Інші фактори (F_7)	1.1	0.05
$\sum$	20.55	1

Окрім неврахованих факторів, модель також повинна бути скорегована для ймовірності помилкових суджень експертів та потенційного досягнення максимального ефекту факторів, що впливають на якість продукції. Помилкові судження експертів (помилки) можуть виникати, коли компетентність експертів низька або коли їх думки різні.

Оскільки саме ця група була сформована з експертів, коефіцієнт компетенції яких дорівнював 1, ефект низького фактора компетенції був мінімізований ($\varepsilon_{\text{комп}} \to 0$).

Ступінь узгодженості експертних думок оцінювали за коефіцієнтом узгодженості Кендала (коефіцієнт конкордації) (формула 3.23). Значення коефіцієнта конкордації, що становить 0,92, дозволяє стверджувати, що результати експертної оцінки є дійсними, і показує, що коефіцієнт невизначеності (помилкові судження експертів та суперечливі думки) робить $\varepsilon_{\text{комп}} = (1 - W) = 8\%$.

Розроблена модель вказує на те, що найбільш важливими факторами ефективності праці, що впливає на поліпшення якості продукції виявились: матеріальна винагорода, умови праці та система санкцій. Їх вплив на підвищення продуктивності персоналу становить 63%, що також сприяє поліпшенню якості продукції.

Завдання для самостійного опрацювання

Завдання 3.1.

Методом аналізу ієрархій серед трьох автомобілів (А1, А2, А3) треба вибрати найкращий за критеріями (К1, К2, К3. Нехай за критерієм К1 автомобіль А1 має слабку значимість по відношенню до А2 та істотну значимість по відношенню до А3; автомобіль А3 має очевидну значимість по відношенню до А2. За критерієм К2 автомобіль А1 має очевидну значимість по відношенню до А2 та слабку значимість по відношенню до А3; автомобіль А3 має однакову значимість по відношенню до А2. За критерієм К3 автомобіль А1 має однакову значимість по відношенню до А2 та істотну значимість по відношенню до А3; автомобіль А2 має слабку значимість по відношенню до А3.

Завдання 3.2.

Методом аналізу ієрархій треба проранжувати три будинки (Б1, Б2, Б3) за критеріями (К1, К2, К3. Нехай за критерієм К1 будинок Б2 має істотну значимість по відношенню до Б1 та слабку значимість по відношенню до Б3; будинок Б3 має очевидну значимість по відношенню до Б1. За критерієм К2 будинок Б1 має істотну значимість по відношенню до Б2 та слабку значимість по відношенню до Б3; будинок Б3 має однакову значимість по відношенню до Б2. За критерієм К3 будинок Б3 має слабку значимість по відношенню до Б2 та істотну значимість по відношенню до Б1; будинок Б2 має слабку значимість по відношенню до Б1.

Завдання 3.3

Провести експертну оцінку ноутбуків вартістю 700-750$.

1. Сформувати групу експертів із 4-5 студентів.
2. Вибрати 5-7 об'єктів для оцінювання.
3. Визначити 5-7 параметрів порівняння.
4. Визначити ваги параметрів.
5. Дати описову порівняльну характеристику для об'єктів.
6. Оцінити параметри об'єктів.
7. Вибрати найкращий об'єкт.

Завдання 3.4

Розробити експертну процедуру для прийняття рішення щодо вибору українського банку для отримання кредиту відповідно до отриманого варіанту.

1. Сформулювати мету експертного аналізу.

2. Сформувати групу організаторів експертизи (не більше 3-х осіб).

3. Розробити процедуру проведення експертної оцінки: вибрати об'єкти для оцінювання (не менше 5), вибрати метод експертної оцінки, розробити критерії оцінювання (для банку – 7 та для відповідної банківської послуги – 3), визначити методику оцінювання результатів, розробити питання анкети (за необхідності), визначити етапи проведення експертизи, експертів (студенти не можуть бути експертами) і т.д.

У результаті виконання завдання повинна бути розроблена чітка процедура експертної оцінки, за якою студент проводитиме експертизу.

Завдання 3.5

На основі результатів завдання 3.4 оцінити розсіювання думок експертів розрахувавши наступні показники:

а) дисперсія оцінок, поставлених j-му напрямку

б) коефіцієнт варіації оцінок, даних j-му напрямку

в) загальна дисперсія оцінок

г) загальна дисперсія рангів.

Зробити відповідні висновки.

Питання для контролю

1. Описати загальну схему експертизи.
2. Оцінити складність виконання конкретної елементарної операції.
3. Порівняти методи мозкового штурму і Делфі.
4. Наведіть переваги та недоліки методу експертних оцінок.
5. За допомогою яких показників оцінюють ступінь узгодженості думок експертів?
6. Якими професійними якостями повинен володіти експерт?
7. В чому полягає статистична обробка даних за результатами анкетування експертів?
8. Наведіть методи визначення оптимальної кількості експертів в групі.
9. Яким чином відбирають групу експертів із загальної кількості потенційних експертів?
10. За якими показниками визначають який фактор (параметр, подія, показник) є вагоміший?
11. В чому полягає суть експертизи? Які основні її властивості?

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баранкевич М.М. Експертні методи в ухваленні рішень: Текст лекцій / М.М. Баранкевич – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. – 214 с.
2. Грабовецький Б.Є. Методи експертних оцінок: теорія, методологія, напрямки використання : монографія [Електронний ресурс] / Б.Є. Грабовецький // ВНТУ. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: http://hrabovecky.vk.vntu.edu.ua/file/a0a40b7bd74c5d39fe693b7b2c99f38f.pdf.
3. Заичкин Н. И. Экономико-математические модели и методы принятия решений в управлении производством: учеб. пособие / Н. И. Заичкин. - М. : Изд. центр ГУУ, 2000. - 107 с.
4. Кігель В. Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: монографія / В. Р. Кігель. - К. : ЦНЛ, - 202 с.
5. Литвак Б. Г. Разработка управленческого решения: учебник / Б. Г. Литвак. - М. : Дело, 2000. - 392 с.
6. Пушкар О. І. Системи підтримки прийняття рішень: навч. посібник / О. І. Пушкар, В. М. Гіковатий, О. С. Євсєєв, Л. В. Потрашкова ; ред. О. І. Пушкар. - Харків : Інжек, 2006. - 304 с.
7. Эддоус, М. Методы принятия решений : учебное пособие / М. Эддоус, Р. Стэнфилд, И. И. Елисеева. - М. : Аудит : ЮНИТИ, 1997. - 590 с.
8. Gogunsky V. D. The coefficient of concordance as an indicator of project evaluation [Електронний ресурс] / V. D. Gogunsky, T. M. Olekh // Conference: Project Management: Status and Prospects VIII International Scientific Conference, At Ukraine, Nikolayev, Volume: 8 – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/283279638_The_coefficient_of_concordance_as_an_indicator_of_project_evaluation.
9. Melkamu M. Investigating Household Common Coping Strategies in Northern Rajasthan using Kendall’s Coefficient of Concordance (W) [Електронний ресурс] / M. Melkamu, N. Singh // International Journal in Management and Social Science. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/292616826_Investigating_Household_Common_Coping_Strategies_in_Northern_Rajasthan_using_Kendall%27s_Coefficient_of_Concordance_W.

ТЕМА 4

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

Загальна лінійна оптимізаційна математична модель

Необхідно визначити такі значення $x_j\ (j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція задачі досягала максимуму або мінімуму:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \Rightarrow max(min) \qquad (4.1)$$

При чому на x_j накладено обмеження, кожне з яких можна віднести до одного з наступних типів:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2,\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,\\
&a_{m+11}x_1 + a_{m+12}x_2 + ... + a_{m+1n}x_n = b_{m+1},\\
&\vdots\\
&a_{m+k1}x_1 + a_{m+k2}x_2 + ... + a_{m+kn}x_n \le b_{m+k}.
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Крім того, в задачі можуть вказуватись обмеження на невід’ємність змінних

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \qquad (4.3)$$

Задачу (4.1) – (4.3) називають загальною задачею лінійного програмування (ЗЛП).

Лінійна функція Z називається цільовою функцією задачі. Все інше, за виключенням умов невід’ємності змінних – обмеженнями.

Будь-яка сукупність $x_j\ (j=\overline{1,n})$, яка задовольняє обмеження, називається *допустимим розв’язком* задачі. Якщо задача лінійного програмування має хоча б один допустимий розв’язок задачі, то її обмеження називають *сумісними*, в протилежному випадку –

несумісними, а задачу, яка не має жодного допустимого розв’язку – *нерозрішимою* задачею через несумісність умов.

Оскільки задачі мають економічний характер, то замість поняття ”розв’язок“ часто використовують аналогічне йому в даному випадку поняття ”план”.

Всі допустимі розв’язки (плани) утворюють *область допустимих рішень* задачі $\boldsymbol{R}$ (область визначення задачі). Допустимий розв’язок задачі, який оптимізує (максимізує або мінімізує) цільову функцію $\boldsymbol{Z}$, називається *оптимальним розв’язком (планом) задачі*.

Задача оптимізації за таких умов може мати:

1. Жодного допустимого розв’язку задачі, тобто може не існувати таких значень змінних $x_j \ (j=\overline{1,n})$, які задовольняли би всі обмеження.
2. Тільки один допустимий оптимальний розв’язок.
3. Кілька допустимих оптимальних розв’язків.
4. Допустимий розв’язок, для якого цільова функція буде необмеженою.

Форми запису лінійних оптимізаційних задач

Більшість відомих методів розв’язку ЗЛП призначені для розв’язку канонічних задач. Тому початковий етап розв’язку загальної задачі лінійного програмування – зведення її до канонічної задачі.

Задача лінійного програмування записана в канонічній формі, якщо її цільова функція максимізується, обмеження мають вид рівностей із невід’ємною правою частиною і всі змінні невід’ємні.

ЗЛП в канонічній формі має вигляд:

$$
\begin{gathered}
Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow max \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,n}.
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Якщо задачу (4.4) запишемо за допомогою знаку суми “Σ“, отримаємо:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{4.5}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}.$$

Введемо позначення:

$C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ – вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор змінних;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор вільних членів;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів при змінних (матриця умов).

За таких позначень канонічну форму задачі у векторно-матричному вигляді записують наступним чином:

$$Z = C^T X \Rightarrow max$$

$$AX = B, \tag{4.6}$$

$$X \geq 0.$$

Позначивши стовпці матриці наступним чином:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

можемо записати ЗЛП у векторній формі:

$$Z = C^T X \Rightarrow max$$

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + ... + A_n X_n = B, \qquad (4.7)$$

$$X \geq 0.$$

Оскільки загальна задача лінійного програмування може мати не тільки обмеження типу ”=“, а цільова функція може не тільки максимізуватися, а й мінімізуватися, то необхідно зводити будь-які ЗЛП до канонічної форми. Основні правила *зведення ЗЛП до канонічної форми*:

1. Якщо ЗЛП є задачею мінімізації функції Z, то така задача зводиться до задачі максимізації функції $(-Z)$, оскільки $min\, Z = -max(-Z)$ (тобто коефіцієнти цільової функції множаться на (**–1**)). При цьому $max(-Z)$ і $min\, Z$ досягається при одних і тих же значеннях змінних.
2. Якщо в обмеженні $b_i < 0,$ тоді обидві частини такого обмеження множать на (-1), при цьому знак нерівності в змінюється на протилежний.
3. Якщо обмеження мають знак ”≤”, то для перетворення їх у рівність необхідно до лівої частини таки обмежень додати відповідні невід’ємні змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m_1}$. Ці змінні вводяться в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами, щоб не змінити її значення. Змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m_1}$ називають додатковими (доповнюючими).
4. Для зведення обмежень виду “≥” до обмежень-рівностей необхідно від лівої частини кожного обмеження відняти невід’ємні змінні $x_{n+m_1+1}, x_{n+m_1+2}, ..., x_{n+m}$. Ці змінні вводяться в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.
5. Якщо у ЗЛП на змінну x_k не накладено умову невід’ємності, то цю змінну заміняють різницею двох невід’ємних змінних:

$$x_k = x'_k - x''_k, \; x'_k \geq 0, \; x''_k \geq 0.$$

Геометрична інтерпретація лінійних оптимізаційних моделей. Графічний метод розв’язування ЗЛП

Задачу лінійного програмування, яка має дві невідомі змінні, можна розв’язати графічним методом, виконуючи наступне:

1. Побудувати область визначення задачі ***(R)***, врахувавши систему обмежень.
2. Побудувати напрямний вектор $\overline{C}$.
3. Побудувати лінію рівня цільової функції $Z = const$ (найпростіше провести пряму $Z = 0$), перпендикулярну до вектора $\overline{C}$.
4. При розв’язанні задачі на максимум паралельно перемістити пряму $Z = const$ в напрямку вектора $\overline{C}$ таким чином, щоб вона зайняла крайнє положення в області допустимих значень. У випадку розв’язання задачі на мінімум лінію рівня переміщують в напрямку, протилежному до напрямку вектора $\overline{C}$.
5. Визначити оптимальний розв’язок. При розв’язанні ЗЛП можливі наступні випадки:

   а) існує єдиний оптимальний план. Лінія рівня і область визначення задачі в крайньому положенні мають одну спільну точку (т. ***A*** на рис. 4.1a) – точка максимуму, т. ***B*** на рис. 4.1a) – точка мінімуму, т. ***D*** на рис. 4.1b) – точка мінімуму);

   б) є необмежена кількість оптимальних розв’язків. У цьому випадку лінія рівня проходить через грань області (пряма ***EF*** на рис. 4.1b) – лінія рівня, що відповідає максимуму цільової функції, пряма ***KL*** на рис. 4.1c) – лінія рівня, що відповідає мінімуму цільової функції);

   в) цільова функція задачі необмежена. Лінія рівня цільової функції не займає крайнього положення, скільки б її не переміщувати, з областю допустимих розв’язків (на рис. 4.1c) випадок максимізації);

   г) задача не має розв’язків. Область обмежень – порожня множина, тобто умови несумісні, а задача – нерозрішима (рис. 4.1d)).

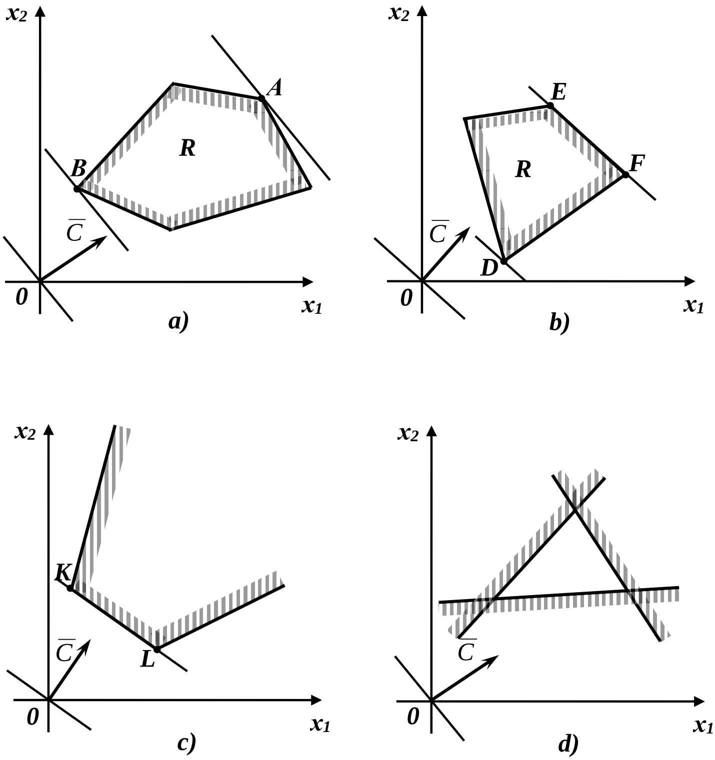


Рис. 4.1. Графічна інтерпретація розв'язків ЗЛП.

Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Розглянемо основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування. Всі допустимі плани задачі лінійного програмування утворюють так звану область визначення задачі.

<u>*Теорема 1:*</u> область визначення задачі лінійного програмування є опуклою множиною (якщо вона непорожня).

Множина планів ЗЛП являє собою замкнутий опуклий многогранник, у двомірному просторі – замкнутий опуклий многокутник. Крім того, область визначення задачі може бути представлена точкою, відрізком, променем.

Теорема 2: Цільова функція задачі лінійного програмування набуває свого екстремального значення в крайній точці (вершині) множини допустимих розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення в більш, ніж одній крайній точці множини допустимих розв'язків, то вона набуває цього ж значення в будь-якій точці, яка є лінійною опуклою комбінацією цих точок.

Тобто, якщо цільова функція набуває екстремального значення в одній крайній точці, то задача лінійного програмування має єдиний оптимальний розв'язок, якщо в більше ніж одній крайній точці – то ЗЛП має нескінченну кількість розв'язків.

Якщо множина допустимих розв'язків задачі має крайні точки, то їх кількість обмежена.

Теорема 3: Для того, щоб точка $X=\left(x_1, x_2,..., x_n\right)$ опуклої множини допустимих розв'язків задачі лінійного програмування була крайньою, необхідно і достатньо, щоб вектори матриці умов задачі, які відповідають додатнім компонентам точки X, були лінійно незалежними.

Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Базисні розв'язки задачі лінійного програмування

Для розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом необхідно звести її до канонічної форми і визначити початковий базисний розв'язок.

Задача лінійного програмування досягає свого оптимального значення у крайній точці (вершині) многогранника рішень. Координати крайньої точки – це базисний розв'язок ЗЛП. Знайти базисний розв'язок можна шляхом послідовних елементарних перетворень обмежень або за допомогою спеціальних обчислювальних прийомів.

Розглянемо обмеження задачі лінійного програмування (4.4), записаної в канонічній формі:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ці обмеження – це система m лінійних рівнянь з n змінними. Вважатимемо, що $m < n$, хоча на практиці зустрічаються задачі, в яких $m > n$ та $m = n$. Система сумісна і її ранг дорівнює m.

В обмеженнях ЗЛП (4.8) всі змінні можна поділити на дві групи: перша група – основні (залежні) змінні, кількість яких повинна дорівнювати кількості лінійно незалежних рівнянь m, друга – неосновні (незалежні), кількість яких дорівнюватиме $n - m$. При чому такий розподіл не пов'язується із індексами змінних.

Вважатимемо, що обмеження (4.8) шляхом послідовних елементарних перетворень можуть бути зведені до вигляду:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad &+ a'_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\
x_2 \quad &+ a'_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\
\vdots \quad & \\
x_m &+ a'_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

де $b'_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1,m})$.

В системі (4.9) коефіцієнти при кожному невідомому $x_1, x_2, \ldots, x_m$ утворюють одиничні вектори

$$
E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Сукупність одиничних векторів $E_1, E_2, \ldots, E_m$ утворюють *базис* m-мірного простору, а змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називаються *базисними*. Змінна називається *базисною*, якщо вона входить тільки в одне з рівнянь системи з коефіцієнтом, що дорівнює 1. Всі інші змінні називаються *небазисними*.

Прирівнявши небазисні змінні до нуля і знайшовши значення базисних змінних, отримаємо частковий розв'язок, який називається *базисним розв'язком*. Тобто, якщо $x_{m+1} = 0, \ x_{m+2} = 0, \ldots, \ x_n = 0,$ то $x_1 = b'_1, \ \ x_2 = b'_2, \ldots, \ \ x_m = b'_m$. Отриманий таким чином перший розв'язок задачі, називається *початковим базисним розв'язком* (планом).

Базисний план називається *виродженим*, якщо значення однієї або кількох базисних змінних дорівнюють нулю. Задача, яка має хоча б один вироджений базисний план, називається *виродженою*, в протилежному випадку – *невиродженою*.

При розв’язанні ЗЛП для побудови початкового базисного плану, як правило, користуються спеціальними прийомами.

Як відомо, у загальній задачі лінійного програмування можуть мати місце три види обмежень: “≤”, “=“ та “≥”. Після зведення ЗЛП, що містить обмеження “≤”, до канонічної форми кожне рівняння буде містити базисну змінну, а саме $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$. Прирівнявши небазисні змінні до нуля: $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0, \dots,\ \ x_n = 0,$ отримаємо базисний план:

$$x_{n+1} = b_1,\ \ x_{n+2} = b_2, ...,\ x_{n+m} = b_m.$$

Після зведення ЗЛП, що містить обмеження “≥”, до канонічної форми (4.10) змінні $x_{n+1},\ x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ не можуть бути прийняті за базисні, оскільки вони входять в рівняння з коефіцієнтом ***(-1)***. Тому для виділення базисних змінних і знаходження допустимого базисного плану використовується *метод штучного базису*, який полягає в наступному.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} \Rightarrow max$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2,\\
&\qquad\cdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m,\\
&\qquad x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n+m}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

В кожне обмеження задачі (4.10) вводяться відповідно штучні невід’ємні змінні $x_{n+m+1},\ x_{n+m+2}, ..., x_{n+m+m}$, які приймаються за базисні. Штучні змінні входять в цільову функцію задачі з коефіцієнтом ***(–M)***, де ***M*** – велике додатне число, яке значно більше заданих в умові задачі.

Після введення штучних змінних задача (4.10) матиме вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} -$$
$$-M \cdot x_{n+m+1} - M \cdot x_{n+m+2} - \ldots - M \cdot x_{n+m+m} \Rightarrow max$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} + x_{n+m+1} = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} + x_{n+m+2} = b_2, \qquad (4.11)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} + x_{n+m+m} = b_m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m+m}.$$

Штучні змінні вводяться лише з метою отримання початкового базисного плану. Поки штучна змінна буде базисною, вона буде приймати додатні значення і, відповідно, зменшувати значення цільової функції в порівнянні з максимальним. Оскільки ці змінні мають великі за абсолютним значенням від’ємні коефіцієнти **(–*M*)**, то в процесі розв’язку задачі симплекс-методом вони із базисних будуть переводитися у небазисні. Оскільки значення небазисних змінних при одержанні базисного розв’язку прирівнюються до нуля, то штучні змінні не будуть впливати на значення цільової функції. Цей же метод використовується і для обмежень типу “=“.

Поняття про симплекс-метод

Для розв’язання задачі лінійного програмування із двома змінними можна використовувати графічний метод. Інколи цей метод можна застосовувати і для розв’язання ЗЛП з трьома і більше змінними. Проте в реальних ситуаціях задачі мають значно більшу розмірність. Для розв’язання таких задач доцільно застосовувати симплекс-метод.

Відомо, що оптимальні розв’язки задачі лінійного програмування пов’язані з вершинами многогранника рішень. Вершин може бути багато, якщо багато обмежень. Кількість вершин відповідає кількості базисних розв’язків. Для кожного базисного розв’язку однозначно визначається значення цільової функції. Знайти оптимальний розв’язок, хаотично перебираючи всі базисні розв’язки в пошуках такого рішення, яке забезпечить досягнення екстремуму цільової функції, досить складно. Тим більше, що при такому невпорядкованому пошуку значення цільової функції не обов'язково будуть монотонно зростати чи монотонно спадати.

Для цього необхідно здійснювати такий перехід від одного базисного розв'язку до іншого починаючи з базисного, в результаті якого новий розв'язок давав у невиродженій задачі на максимум більше значення цільової функції, а у невиродженій задачі на мінімум – менше значення. Такий метод послідовного покращення плану задачі лінійного програмування отримав назву симплекс-метод. Процес розв'язку задачі продовжується до одержання оптимального плану або до встановлення факту відсутності рішення задачі. Якщо ЗЛП вироджена, то при переході від одного базисного плану до другого значення цільової функції може не змінитися. Перехід від одного базисного плану до іншого називається *ітерацією* симплекс-методу.

Критерій розрішимості задачі лінійного програмування. Для того, щоб ЗЛП була розрішимою, тобто мала оптимальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб обмеження задачі були сумісними (множина допустимих розв'язків непорожньою) і цільова функція була обмежена при пошуку максимуму зверху, а при пошуку мінімуму – знизу.

Геометрична інтерпретація симплекс-методу полягає в тому, що здійснюється послідовний перехід від однієї вершини многогранника допустимих розв'язків до сусідньої, в якій цільова функція приймає значення не гірше, ніж в попередній. Точки називаються сусідніми, якщо вони розташовані на одному ребрі.

Відповідно, кількість ітерацій симплекс-методу залежить від вибору початкового базисного плану і кількості вершин, які зустрічаються при русі від початкового базисного плану до оптимального.

Алгоритм симплекс-методу

1. Побудова початкової симплекс-таблиці здійснюється за наступною схемою:

<table>
<tr><td rowspan="2">$X^Б$</td><td rowspan="2">$C^Б$</td><td rowspan="2">C_j
B</td><td>c_1</td><td>…</td><td>c_j</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>…</td><td>x_j</td><td>…</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_i</td><td>c_i</td><td>b_i</td><td></td><td></td><td>a_{ij}</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Індексний рядок</td><td>Z</td><td>d_1</td><td>…</td><td>d_j</td><td>…</td></tr>
</table>

У стовпці $X^Б$ записуються базисні змінні, у стовпці $C^Б$ – коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції (c_i), у стовпці B – вільні члени обмежень (b_i), тобто значення базисних змінних. У стовпцях x_j (небазисні змінні) записуються коефіцієнти при небазисних змінних в обмеженнях (a_{ij}), над змінними x_j – коефіцієнти при цих змінних в цільовій функції (c_j). Індексний рядок у стовпці B відображає значення цільової функції, яке розраховується за формулою

$$Z = \sum_{i \in I_б} c_i b_i \ , \tag{4.12}$$

де $I_б$ – множина базисних змінних.

Стовпці x_j цього рядка – значення оцінок d_j, які розраховуються за формулою:

$$d_j = \sum_{i \in I_б} c_i a_{ij} - c_j \,, \quad j \notin I_б \,. \tag{4.13}$$

При визначенні значення Z потрібно визначити суму добутків елементів стовпця $C^Б$ і відповідних елементів стовпця B, що рівнозначно підстановці базисного плану в цільову функцію, а при визначенні значення оцінки d_j – суму добутків елементів стовпця $C^Б$ на відповідні елементи того стовпця x_j, для якого вона розраховується.

2. Перевірка отриманого базисного плану на оптимальність за умовою оптимальності.

Якщо $j \notin I_б$, $d_j \geq 0$ і серед базисних змінних немає штучних, то план оптимальний.

Якщо $j \notin I_б$, $d_j \geq 0$ і серед базисних змінних є штучні, то задача нерозрішима через несумісність умов.

Якщо $\exists d_j < 0$, то отриманий базисний план неоптимальний і необхідно здійснювати перехід до наступного базисного плану.

Якщо в оптимальному плані $\exists d_j = 0$, $j \notin I_б$, то задача має безліч розв'язків.

3. Для переходу до нового базисного плану потрібно вибрати із небазисних змінних з від'ємними оцінками d_j змінну, яка вводитиметься в базис. Введемо в новий базис змінну x_s, якій відповідає найбільша за абсолютною величиною від'ємна оцінка d_j:
$$|d_s| = \max_j |d_j|. \tag{4.14}$$

Стовпець, який відповідає змінній x_s, називають розв'язковим. Елементи розв'язкового стовпця позначають через a_{is}. Вибрана змінна x_s буде вводитися в базис.

Якщо виявиться кілька однакових найбільших за абсолютною величиною від'ємних оцінок, то вибирається будь-яка із відповідних їм змінних.

4. Вибирають змінну, яка виводиться з базису. Її індекс r знаходиться із співвідношення
$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_i \frac{b_i}{a_{is}}, \tag{4.15}$$

по всіх i, для яких $a_{is} > 0$.

Стрічку таблиці, в якій отримано найменше співвідношення $\left(\frac{b_r}{a_{rs}}\right)$ елемента стовпця B до відповідного додатного елемента розв'язкового стовпця, називають розв'язковою. Елементи розв'язкової стрічки позначають через a_{rj}. Вибрана змінна x_r буде виводитися із базису.

Якщо виявиться кілька однакових найменших значень співвідношень, то вибирається будь-яка із відповідних їм змінних. Такий випадок може мати місце у виродженій задачі.

Елемент, який стоїть на перетині розв'язкового стовпця і розв'язкової стрічки, називають розв'язковим елементом і позначають через a_{rs}.

У випадку відсутності значень $a_{is} > 0$ задача нерозрішима через необмеженість цільової функції на множині допустимих планів задачі.

5. Для визначення нового базисного плану проводять перерахунок елементів таблиці, результати якого відображають у новій симплекс-таблиці. Вибрані змінні (x_s та x_r) міняють місцями в таблиці разом зі своїми коефіцієнтами в цільовій функції (x_r виводиться з базису, x_s вводитися в базис). Інші змінні переписуються без змін зі своїми коефіцієнтами. Елементи нової симплекс-таблиці розраховуються за наступними формулами:

- елементи розв'язкової стрічки нової симплекс-таблиці дорівнюють відповідним елементам старої таблиці, поділеним на розв'язковий елемент:

$$b'_r = \frac{b_r}{a_{rs}}; \; a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}; \tag{4.16}$$

- елементи розв'язкового стовпця нової симплекс-таблиці дорівнюють нулю за виключенням a_{rs}, оскільки змінна x_s стала базисною;
- для того, щоб знайти будь-який інший елемент нової симплекс-таблиці, доцільно застосувати правило прямокутника за формулами:

$$b'_i = b_i - \frac{b_r a_{is}}{a_{rs}}; \; a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj} a_{is}}{a_{rs}}; \tag{4.17}$$

для оцінок d_j та цільової функції Z використовують наступні формули:

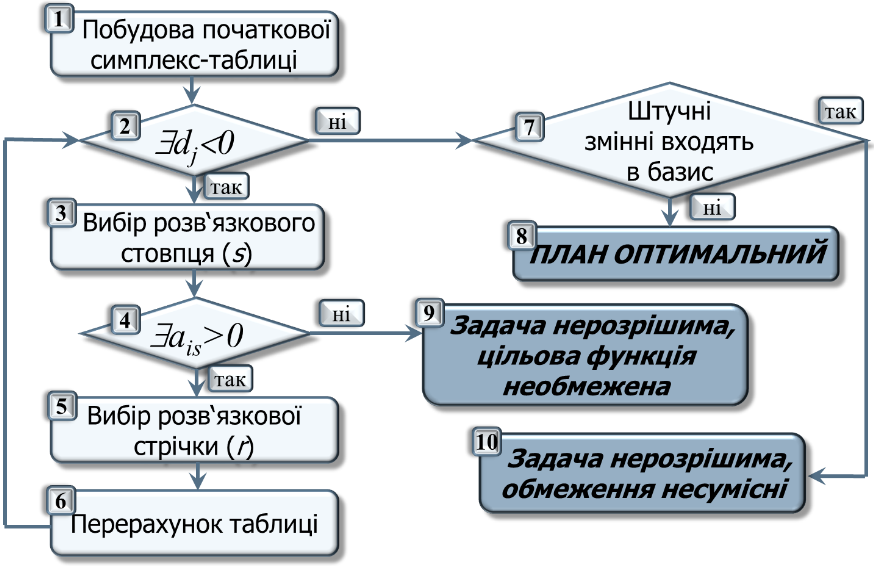
$$d'_j = d_j - \frac{d_s a_{rj}}{a_{rs}}; \;\; Z' = Z - \frac{b_r d_s}{a_{rs}}. \tag{4.18}$$

Зауваження:

1) Якщо в розв'язковому стовпці симплекс-таблиці, що перераховується, стоїть нуль, то відповідна йому стрічка у нову симплекс-таблицю переписується без змін.

2) Якщо в розв’язковій стрічці симплекс-таблиці, що перераховується, стоїть нуль, то відповідний їй стовпець у нову симплекс-таблицю переписується без змін.
3) Якщо із базисних змінних виключається штучна змінна, то відповідний їй стовпець в нову симплекс-таблицю не включається і, відповідно, не перераховується. Оскільки штучні змінні вводяться в базис лише для отримання початкового базисного плану, тому в процесі розв’язання вони виводяться з базису і більше туди не потрапляють.

БЛОК-СХЕМА АЛГОРИТМУ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ



6. Перевірка правильності розрахунку значень цільової функції ***Z*** і оцінок d_j за формулами (4.12), (4.13). Перехід до кроку 2.

Для розв’язання задач лінійного програмування великої розмірності використовується відповідне програмне забезпечення. Для задач невеликої розмірності можна використовувати симплекс-метод вручну.

Поняття двоїстості.
Правила побудови двоїстих моделей оптимізаційних задач

Кожній задачі лінійного програмування, яку назвемо прямою, можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку назвемо *двоїстою* до неї. Разом ці задачі утворюють *пару взаємно двоїстих задач* і будь-яку з них можна розглядати як пряму. Розв'язуючи одну з цих задач, можна отримати розв'язок другої задачі.

Двоїста задача – це допоміжна задача лінійного програмування, яка будується за певними правилами безпосередньо із умов прямої задачі.

Правила побудови двоїстих задач:

1. Якщо цільова функція $\boldsymbol{Z}$ прямої задачі максимізується, то цільова функція $\boldsymbol{L}$ двоїстої задачі мінімізується, і навпаки.
2. Кількість обмежень $\boldsymbol{(m)}$ прямої задачі дорівнює кількості невідомих змінних двоїстої, а кількість невідомих змінних $\boldsymbol{(n)}$ прямої задачі – кількості обмежень двоїстої.
3. Коефіцієнти цільової функції $\boldsymbol{(c_j)}$ прямої задачі стають вільними членами обмежень двоїстої задачі.
4. Вільні члени обмежень $\boldsymbol{(b_i)}$ прямої задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.
5. Матриця обмежень прямої задачі $\boldsymbol{(A)}$ в обмеженнях двоїстої задачі транспонується $\boldsymbol{(A^T)}$.
6. Оскільки змінні прямої задачі пов'язані з обмеженнями двоїстої, кожній змінній $\boldsymbol{x_j \ge 0}$ відповідає у двоїстій задачі обмеження типу "≤" $\boldsymbol{(Z \to max)}$ або "≥" $\boldsymbol{(Z \to min)}$, і навпаки.
7. Кожній змінній $\boldsymbol{x_j}$ необмеженій за знаком, відповідає обмеження типу "=" двоїстої задачі, і навпаки.

Побудуємо пряму і двоїсту до неї задачі. Пряма задача:

$$\boldsymbol{Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max}$$

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},} \tag{4.19}$$

$$\boldsymbol{x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.}$$

Двоїста задача:

$$L = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ j = \overline{1,n}, \qquad (4.20)$$

$$y_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Пари взаємно двоїстих задач бувають симетричними і несиметричними.

	Пряма задача	Двоїста задача
	Симетричні задачі	
I	$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = \overline{1,m},$ $x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}.$	$L = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ j = \overline{1,n},$ $y_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}.$
II	$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow min$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ i = \overline{1,m},$ $x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}.$	$L = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow max$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, \ j = \overline{1,n},$ $y_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}.$
	Несиметричні задачі	
III	$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1,m},$ $x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}.$	$L = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ j = \overline{1,n}.$
IV	$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow min$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1,m},$ $x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}.$	$L = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow max$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, \ j = \overline{1,n}.$

Якщо обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а на невідомі змінні обох задач накладено умови невід'ємності, то така пара взаємно двоїстих задач називається симетричною. У несиметричній парі двоїстих задач обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – як нерівності, і навпаки. У таких випадках відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, необмеженого знаком.

Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Теорема 1. Для будь-яких допустимих розв'язків X та Y пари двоїстих задач лінійного програмування справедлива нерівність:

$$Z(X) \le L(Y), \qquad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Економічна інтерпретація цієї нерівності: для будь-якого допустимого плану виробництва і будь-якого допустимого вектора оцінок ресурсів вартість випущеної продукції не перевищує оцінки ресурсів.

Теорема Канторовича: якщо для допустимих планів X^* та Y^* пари двоїстих задач виконується умова

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* ,$$

то ці плани є оптимальними для пари двоїстих задач.

Перша теорема двоїстості: якщо одна із пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то і друга задача має оптимальний розв'язок. При чому екстремальні значення їх цільових функцій рівні. Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач необмежена зверху при прямуванні до максимуму (або знизу при прямуванні до мінімуму) на своїх допустимих множинах, то друга задача нерозрішима через несумісність умов.

Покажемо на прикладі економічний зміст першої теореми двоїстості. Оптимальний план виробництва можна побудувати лише у випадку, коли ресурсам можна поставити у відповідність раціональні оцінки. Оцінка продукції, отримана при реалізації оптимального плану, співпадає із сумарною оцінкою наявних ресурсів. Будь-який інший план нерентабельний.

Якщо c_j – оцінка реалізації одиниці продукції визначається ринковими механізмами, то y_i – внутрішня оцінка ресурсу. Тоді першу теорему двоїстості можна інтерпретувати так: допустимий план виробництва і вектор оцінок ресурсів будуть оптимальними тоді, коли обсяг реалізації продукції, визначений зовнішніми оцінками c_j, буде дорівнювати оцінці всіх ресурсів у внутрішніх оцінках y_i, виділених для виробничого споживання. Звідси двоїсті оцінки виступають як інструмент збалансування затрат і результатів.

Між змінними прямої і двоїстої задачі можна встановити наступні взаємно однозначні відповідності: $x_j \leftrightarrow y_{m+j}$, $x_{n+i} \leftrightarrow y_i$. Отримати розв'язок двоїстої задачі можна із останньої симплекс-таблиці прямої задачі. Якщо пряма задача розв'язується на максимум, то оптимальний розв'язок двоїстої відповідає оцінкам індексної стрічки в останній симплекс-таблиці прямої задачі, тобто:

$$y_i^* = d_{n+i}^*, \; y_{n+j}^* = d_j^*.$$

Якщо пряма задача розв'язується на мінімум, то оптимальний розв'язок двоїстої відповідає оцінкам індексної стрічки, взятим з протилежними знаками, тобто:

$$y_i^* = -d_{n+i}^*, \; y_{n+j}^* = -d_j^*.$$

Запишемо останню симплекс-таблицю задачі:

$X^Б$	$C^Б$	C_j / B	8	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	8	2	1	0	2/3	0	-1/2
x_4	0	6	0	0	-3	1	3/2
x_2	10	4	0	1	-1/3	0	1/2
Індексний рядок		56	0	0	2	0	1

Встановимо відповідність між змінними прямої і двоїстої задачі:

$x_3 \leftrightarrow y_1$, $x_4 \leftrightarrow y_2$, $x_5 \leftrightarrow y_3$.

$y_1^* = d_3^* = 2$, $y_2^* = d_4^* = 0$, $y_3^* = d_5^* = 1$, $Z = 56$.

Друга теорема двоїстості: для того, щоб допустимі розв'язки X^* та Y^* пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови (умови доповняльної нежорсткості):

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \; j = \overline{1,n}, \qquad (4.21)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{4.22}$$

тобто якщо яке-небудь обмеження однієї задачі за оптимального плану перетворюється у строгу нерівність, то відповідна змінна двоїстої їй задачі в її оптимальному плані дорівнює нулю; якщо ж якась змінна оптимального розв'язку однієї задачі додатна, то відповідне обмеження в двоїстій задачі за оптимального плану перетворюється в точну рівність:

$$\text{якщо } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* > b_i,\ \text{то}\quad y_i^* = 0,$$

$$\text{якщо } y_i^* > 0,\ \text{то}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i.$$

Аналогічно,

$$\text{якщо } x_j^* > 0,\ \text{то}\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j,$$

$$\text{якщо } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j,\ \text{то}\quad x_j^* = 0.$$

Звідси слідує, що оцінки оптимального плану – це міра дефіцитності ресурсів. Ресурс, який використовується в оптимальному виробничому плані повністю, є дефіцитним, його оцінка додатна. Якщо ресурс використовується неповністю, то він є у надлишку. Двоїста оцінка недефіцитного ресурсу дорівнює нулю.

Розв'язок прямої задачі наступний: $X^* = (2;4;0;6;0)$, $Z=56$, тобто потрібно випускати продукцію ***P1*** у кількості ***2*** одиниці, продукцію ***P2*** – у кількості ***4*** одиниці. Дохід при цьому становитиме ***56*** гривень. Розв'язок двоїстої задачі: $Y^* = (2;0;1;0;0)$, $F=56$. Як видно із розв'язку, перший і третій ресурси використовуються повністю. Їх двоїсті оцінки відмінні від нуля: оцінка ресурсу ***R1*** $y_1^* = 2$, оцінка ресурсу ***R3*** $y_3^* = 1$. Другий ресурс є у надлишку $x_4^* = 6$. Його двоїста оцінка дорівнює нулю $y_2^* = 0$.

Двоїсті оцінки показують, на скільки зміниться цільова функція при зміні відповідного ресурсу на одиницю. Двоїста змінна чисельно дорівнює вкладу в цільову функцію зміни відповідного обмеження ресурсу на одиницю. Збільшення першого ресурсу на одиницю пов'язано із зростанням доходу від реалізації на ***2*** одиниці, другий ресурс – недефіцитний, його збільшення недоцільне, збільшення третього ресурсу на одиницю пов'язано із зростанням доходу від реалізації на ***1*** одиницю.

Економіко-математична модель транспортної задачі

Одним з важливих класів оптимізаційних задач є транспортні задачі. Суть таких задач – мінімізація загальної вартості перевезень певної кількості товарів від постачальників до споживачів.

Постановка задачі: нехай є m постачальників (складів, пунктів виробництва) $A_1, A_2,\dots, A_m$, які мають в наявності однорідну продукцію у кількості відповідно $a_1, a_2,\dots, a_m$, та n споживачів (торговельних точок, пунктів призначення) $B_1, B_2,\dots,B_n$, потреба яких у цій продукції становить відповідно $b_1, b_2,\dots,b_n$.

Відома вартість перевезення c_{ij} одиниці вантажу від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$.

Потрібно скласти такий план перевезення продукції (визначити скільки одиниць вантажу перевозити від якого постачальника до якого споживача), який забезпечить мінімальні сумарні витрати на перевезення за умови, що всі потреби споживачів будуть задоволені.

Зауваження: вантаж, який перевозять, повинен бути однорідним, наприклад, вугілля, нафта, цегла, пісок, ліс, метал і т.д. Вантаж може вимірюватись у тоннах, кілограмах, м^2, м^3, штуках, літрах і т.д. Вартість перевезення, як правило, вимірюється в грошових одиницях (грн, \$, €, руб.). Вважають, що вартість перевезення вантажу пропорційна його кількості. Постачальниками можуть бути підприємства, сировинні бази, склади, пункти виробництва, споживачами – підприємства, магазини, будівельні об'єкти та ін.

Побудуємо економіко-математичну модель транспортної задачі.

Параметри моделі:

m – кількість постачальників; i – номер постачальника, $i=1,2,\dots, m$;

n – кількість споживачів; j – номер споживача, $j=1,2,\dots,n$;

a_i – запас продукції постачальника A_i;

b_j – потреба у продукції споживача B_j;

c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до споживача B_j.

Невідомі змінні моделі:

x_{ij} – показують кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до споживача B_j.

T – загальні транспортні витрати.

Для представлення умови задачі зведемо вихідні дані в таблицю:

	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
a_1	$\boxed{c_{11}}$ x_{11}	$\boxed{c_{12}}$ x_{12}	…	$\boxed{c_{1j}}$ x_{1j}	…	$\boxed{c_{1n}}$ x_{1n}
a_2	$\boxed{c_{21}}$ x_{21}	$\boxed{c_{22}}$ x_{22}	…	$\boxed{c_{2j}}$ x_{2j}	…	$\boxed{c_{2n}}$ x_{2n}
	…	…	…	…	…	…
a_i	$\boxed{c_{i1}}$ x_{i1}	$\boxed{c_{i2}}$ x_{i2}	…	$\boxed{c_{ij}}$ x_{ij}	…	$\boxed{c_{in}}$ x_{in}
	…	…	…	…	…	…
a_m	$\boxed{c_{m1}}$ x_{m1}	$\boxed{c_{m2}}$ x_{m2}	…	$\boxed{c_{mj}}$ x_{mj}	…	$\boxed{c_{mn}}$ x_{mn}

Цільова функція відображає транспортні витрати на здійснення всіх перевезень в цілому:

$$T = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} +$$
$$+ c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots$$
$$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \Rightarrow min$$

Перша група обмежень показує, що сумарний обсяг перевезень від будь-якого постачальника повинен дорівнювати запасам продукції цього постачальника:

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1,$$
$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2,$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m.$$

Друга група обмежень показує, що сумарний обсяг перевезень до будь-якого споживача повинен повністю задовольнити попит на продукцію цього споживача:

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1,$$
$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2,$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n.$$

Умови невід'ємності змінних показують, що кількість продукції, що перевозиться – величина невід'ємна:

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Модель транспортної задачі матиме наступний вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow min$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n}, \qquad (4.23)$$
$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Кількість невідомих змінних в моделі дорівнює mxn, кількість обмежень – $m+n$.

Із моделі (4.23) слідує, що сума запасів продукції у всіх постачальників повинна бути рівною сумі потреб всіх споживачів, тобто

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (4.24)$$

Умову (4.24) називають балансом мас. Якщо умова (4.24) виконується, то така транспортна задача називається закритою (збалансованою), якщо не виконується – відкритою (незбалансованою).

Для того, щоб задача (4.23) була розрішимою, тобто мала оптимальний план, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (4.24).

Якщо умова (4.24) не виконується, то для розв'язання ТЗ необхідно збалансувати:

1) У випадку, якщо сумарні запаси перевищують сумарні потреби, тобто виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{4.25}$$

то необхідно ввести додаткового фіктивного споживача (B_{n+1}), який формально буде споживати надлишок запасів, тобто:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \,.$$

2) У випадку, якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, тобто виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{4.26}$$

то необхідно ввести додаткового фіктивного постачальника (A_{m+1}), який формально буде постачати продукцію, якої не вистачає, тобто:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \,.$$

Для фіктивних перевезень вводяться фіктивні тарифи ($c_{i,n+1}$ або $c_{m+1,j}$), величина яких прирівнюється до нуля. Але в деяких випадках величину фіктивного тарифу можна інтерпретувати як штраф, яким обтяжується кожна одиниця недопоставленої продукції.

Методи побудови початкового базисного плану ТЗ

Для побудови початкового базисного плану вихідні дані транспортної задачі зводяться в таблицю. Вартість перевезення c_{ij} записують у верхньому правому куті відповідної клітинки, кількість продукції, що перевозиться x_{ij} – в центрі відповідної клітинки. Із умови (4.24) слідує, що будь-яке обмеження транспортної задачі є лінійною комбінацією інших. Отже, система обмежень транспортної задачі є лінійно залежною і містить лише $m+n-1$ незалежних рівнянь. Тому початковий допустимий базисний план повинен містити $m+n-1$ базисних змінних і його легко можна отримати із даних таблиці. Всі інші змінні – небазисні, їх значення дорівнюють нулю. Такі змінні (нулі) в таблиці не будемо відображати.

Для побудови початкового базисного плану використовуються різні методи: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента, метод Фогеля та ін.

Метод північно-західного кута. Визначення значень x_{ij} починається з лівого верхнього кута (пн-зх). Знаходимо значення x_{11} із співвідношення:

$$x_{11} = min\{a_1, b_1\}.$$

Можливі три варіанти:

1) Якщо $a_1<b_1$, $x_{11} = a_1$, стрічка $i=1$ виключається із подальшого розгляду, а потреба першого споживача b_1 (стовпець $j=1$) зменшується на величину a_1;

2) Якщо $a_1>b_1$, $x_{11} = b_1$, стовпець $j=1$ виключається із подальшого розгляду, а запас першого постачальника a_1 (стрічка $i=1$) зменшується на величину b_1;

3) Якщо $a_1=b_1$, $x_{11} = a_1 = b_1$ – такий варіант приводить до виродження оптимального плану. Для уникнення цього із подальшого розгляду виключається або стрічка $i=1$ (потреба j-го постачальника дорівнює нулю і вважається додатним числом) або стовпець $j=1$ (запас i-го постачальника дорівнює нулю і вважається додатним числом).

Після цього аналогічні операції проводять із рештою таблиці, починаючи із її північно-західного кута. На останньому кроці процесу залишається одна стрічка і один стовпець. Після заповнення клітинки, яка стоїть на їх перетині, процес завершується.

Після заповнення таблиці, потрібно провести перевірку отриманого плану на вродженість. Якщо кількість заповнених клітинок дорівнює $m+n–1$, то план невироджений, інакше – план вироджений.

Якщо план вироджений, тобто кількість заповнених клітинок менша $m+n–1$, то незаповнені клітинки з мінімальними вартостями перевезень заповнюються нулями, щоб загальна кількість заповнених клітинок дорівнювала $m+n–1$. Проте необхідно пам’ятати, що в таблиці не повинно бути жодного прямокутника, всі вершини якого є заповненими. Наприклад, змінні $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$, або $x_{11}, x_{13}, x_{31}, x_{33}$ не можуть бути одночасно базисними.

Метод мінімального елемента. На відміну від методу північно-західного кута цей метод враховує при побудові початкового базисного плану вартість перевезень. Досить часто цей метод дозволяє отримати кращий з точки зору критерію оптимальності план, що скорочує кількість ітерацій для отримання оптимального базисного плану.

Для отримання початкового базисного плану необхідно провести $m+n-1$ ітерацій, за кожну з яких визначається одна базисна змінна плану.

Визначення значень x_{ij} починається з клітинки, яка має мінімальну вартість перевезення (якщо таких клітинок більше, ніж одна, то вибирається будь-яка з них).

Як і в методі північно-західного кута, змінній, яка відповідає вибраній клітинці, присвоюється мінімальне з двох можливих значень. Відповідні стрічка або стовпець виключаються із подальшого розгляду, а потреба споживача або запас продукції у постачальника зменшується на вибрану величину. Якщо для вибраної клітинки з мінімальною вартістю перевезення наявність продукції у постачальника дорівнює потребі споживача, то з подальшого розгляду виключається або стрічка, або стовпець.

Потім здійснюються аналогічні перетворення, знову починаючи з клітинки із мінімальною вартістю перевезення. На останньому кроці процесу залишається одна стрічка і один стовпець. Після заповнення клітинки, яка стоїть на їх перетині, процес завершується.

Перевірка отриманого плану на виродженість і розставлення нулів у випадку виродженості здійснюється як і в методі північно-західного кута.

Алгоритм розв'язування транспортної задачі

Із одержаного одним з вищеописаних методів побудови початкового базисного плану транспортної задачі можна отримати оптимальний за допомогою симплекс-методу. Проте для транспортної задачі цей метод є дуже громіздкий. Тому для відшукання оптимального плану розроблені спеціальні методи: метод потенціалів, розподільчий метод та ін.

Розглянемо алгоритм методу потенціалів.

1. Кожному постачальнику A_i (тобто кожній стрічці) поставимо у відповідність деяке число u_i $(i=1,2,\dots, m)$, яке називатимемо потенціалом A_i, а кожному постачальнику B_j (тобто кожному стовпцю) поставимо у відповідність деяке число v_j $(j=1,2,\dots,n)$, яке називатимемо потенціалом B_j.

Для кожної заповненої клітинки, тобто для кожної базисної змінної, будується співвідношення:

$$u_i + v_j = c_{ij}. \tag{4.27}$$

Отримана система матиме $m+n-1$ рівнянь (оскільки кількість базисних змінних дорівнює $m+n-1$) з $m+n$ невідомими. Така система має безліч розв’язків і будь-який з них буде містити шукані потенціали. Для того, щоб знайти одне з рішень, значення одного з потенціалів в системі задається довільно (наприклад, $u_1=0$ або $v_1=0$). Значення потенціалів записують справа (u_i) і знизу (v_j) таблиці навпроти відповідних стрічок і стовпців.

2. Для кожної незаповненої клітинки, тобто для кожної небазисної змінної, розраховуються оцінки d_{ij} за формулою:

$$d_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}. \tag{4.28}$$

Розрахунок оцінок проводиться безпосередньо в таблиці, результати заносяться в лівий нижній кут відповідної небазисної клітинки. Для базисних змінних оцінки не розраховуються, оскільки для них $d_{ij} = 0$.

3. Перевіряємо базисний план на оптимальність за критерієм оптимальності транспортної задачі:

$$d_{ij} \le 0. \tag{4.29}$$

Якщо умова (4.29) виконується, то даний базисний план – оптимальний. Якщо хоча б для однієї небазисної клітинки $d_{ij} > 0$, то даний базисний план неоптимальний і необхідно провести перехід до наступного базисного плану. Величина d_{ij} показує скільки зайвих витрат з розрахунку на кожну одиницю вантажу від того, що перевезення від i-го постачальника до j-го споживача не включене до плану перевезень. Тому у план буде включатися та змінна x_{rs}, якій відповідає найбільше значення d_{ij}:

$$d_{rs} = \max_{d_{ij}>0} d_{ij}. \tag{4.30}$$

4. Для побудови нового базисного плану необхідно провести зсув мас. Для правильного переміщення перевезень, будується цикл, тобто замкнутий шлях, який починається у вибраній клітинці (r,s), проходить через базисні клітинки і закінчується у клітинці (r,s).

Цикл можна побудувати наступним чином: викреслюються всі стрічки і стовпці, які містять лише одну базисну клітинку (вибрана клітинка **(r,s)** при цьому вважається базисною). Всі інші базисні клітинки включаються в ланцюг.

5. В кожній клітинці, починаючи з клітинки **(r,s)**, ставляться почергово знаки “+” і “–”. В клітинках зі знаком “–” вибирається мінімальне значення x_{ij} (ця клітинка буде виводитися з базису). На цю величину зменшується кількість продукції, що перевозиться, у клітинках ланцюга, де стоїть знак “–”, та збільшується кількість продукції, що перевозиться, у клітинках ланцюга, де стоїть знак “+”.

Отримані нові значення записуються у нову таблицю. Переходимо до кроку 1.

Застосування транспортної задачі до розв’язування різних економічних задач

Транспортні задачі використовуються в економіці не тільки для оптимізації перевезень. Залежно від інтерпретації величин c_{ij}, a_i, b_j та x_{ij} можна отримати однопродуктову модель оптимального розміщення виробництва, задачу про призначення та ін. Розглянемо модель задачі про призначення.

Керівництву підприємства потрібно призначити n працівників на n робіт. Відомі вартості (тривалість) виконання кожної роботи кожним виконавцем (c_{ij}). Необхідно розподілити роботи між працівниками таким чином, щоб забезпечити виконання всіх робіт за мінімальних витрат (мінімальної тривалості виконання робіт).

Для побудови моделі задачі про призначення введемо змінні x_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i-\text{й працівник призначається на виконання } j-\text{ої роботи;}\\ 0, & \text{якщо } i-\text{й працівник не призначається на виконання } j-\text{ої роботи.}\end{cases}$$

Вартість виконання всіх робіт повинна бути мінімальною. Тому цільова функція задачі матиме вигляд:

$$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\Rightarrow min \qquad (4.31)$$

На кожну роботу призначається лише один працівник. Ця умова буде відображатися у наступних обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.32}$$

Кожен працівник призначається лише на одну роботу. Така умова відображатиметься у наступних обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.33}$$

Модель задачі про призначення є частковим випадком транспортної задачі, в якій $a_i = b_j = 1$, $m = n$. Будь-яка ТЗ з цілими a_i та b_j завжди має цілочисловий розв’язок, причому в даному випадку єдиним можливим цілим є 1. Тому умову $x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases}$ можна записати як умову невід’ємності:

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.34}$$

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 4.1. Підприємство для виготовлення двох видів продукції ***P1*** та ***P2*** використовує три види ресурсів ***R1***, ***R2*** та ***R3***, кількість яких обмежена. Вихідні дані задачі наведені в таблиці:

Вид ресурсів	***Кількість ресурсів, що використовується для виготовлення одиниці продукції***		***Запас ресурсів***
	P1	***P2***	
R1	3	3	18
R2	6	3	30
R3	2	4	20
Дохід від реалізації одиниці продукції, грн	8	10	

Визначити такий план випуску продукції, який забезпечить отримання максимального доходу.

Розв'язання:

Запишемо економіко-математичну модель задачі. Позначимо x_1 – шукана кількість продукції ***P1***, x_2 – шукана кількість продукції ***P2***. Отримаємо:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 \Rightarrow max$$

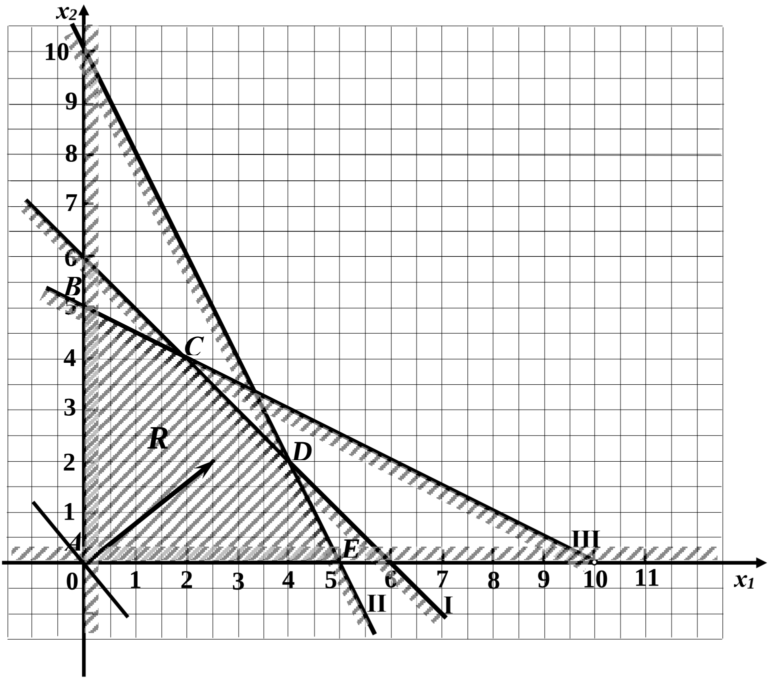
$$3x_1 + 3x_2 \leq 18,$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 30,$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Побудуємо область допустимих розв'язків задачі. У двомірному просторі рівнянню відповідає пряма, а нерівності – півплощина, яка лежить по одну сторону від прямої. Якщо нерівність нестрога, то до відповідної півплощини належить також і сама пряма. Щоб визначити, яку саме із півплощин визначає дана нерівність, потрібно підставити в неї координати будь-якої точки, що не лежить на граничній прямій. Якщо нерівність задовольняється, то шукана півплощина – та, в якій лежить дана точка; якщо нерівність не задовольняється – протилежна їй.



Зобразимо на площині обмеження:

$$3x_1 + 3x_2 \leq 18, \quad (I)$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 30, \quad (II)$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 20. \quad (III)$$

Оскільки на змінні накладено умови невід'ємності: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$, то область допустимих значень обмежується, крім того, осями координат.

Область визначення задачі ***(R)*** буде являти собою перетин всіх побудованих напівплощин. В даному випадку утворено многокутник ***ABCDE***. Кожна точка цього многокутника, включаючи точки, що лежать на його границях, буде задовольняти обмеження та умови невід'ємності задачі.

Для побудови цільової функції ***Z*** побудуємо пряму $8x_1 + 10x_2 = 0$. В лівій частині рівняння прямої – скалярний добуток двох векторів $\overline{C} = (8,10)$ та $\overline{X} = (x_1,\ x_2)$. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні. Побудуємо вектор $\overline{C}$, який проходить через початок координат і точку ***(8;10)*** та перпендикулярно йому через початок координат проведемо пряму, яка і буде прямою $8x_1 + 10x_2 = 0$.

Вектор $\overline{C}$ завжди показує напрям зростання значення цільової функції, а протилежний йому вектор $(-\overline{C})$ – напрям спадання цільової функції. Рухаючи пряму $8x_1 + 10x_2 = 0$ по області визначення паралельно самій собі в напрямку вектора $\overline{C}$, значення цільової функції будуть збільшуватися. Рух в напрямку вектора $(-\overline{C})$ дасть зменшення значення цільової функції.

Рух на графіку прямої рівносильний зміні значення d в рівнянні $8x_1 + 10x_2 = d$. Для знаходження оптимального розв’язку задачі потрібно пересувати пряму $8x_1 + 10x_2 = d$ в напрямку вектора $\overline{C} = (8,10)$, починаючи з деякого фіксованого положення, при якому вона перетинається з областю визначення задачі R до тих пір, поки вона не перестане перетинатись з нею. Оптимальною вважається точка, через яку проходить лінія рівня, яка відповідає найбільшому (у випадку максимізації) або найменшому (у випадку мінімізації) значенню цільової функції. Оптимальний розв’язок завжди знаходиться на границі області допустимих розв’язків, наприклад, в останній вершині многокутника ***ABCDE***, через яку пройде цільова пряма, або на всій його стороні.

Оптимальному розв’язку задачі відповідає точка D, яка лежить на перетині двох прямих:

$$3x_1 + 3x_2 = 18, \quad (I)$$

$$6x_1 + 3x_2 = 30. \quad (II)$$

Для визначення координат точки D потрібно розв’язати систему. У результаті отримаємо:

$$\begin{cases} 3x_1 = 12, \\ x_2 = 10 - 2x_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Підставивши отриманий розв’язок у цільову функцію, отримаємо:

$$Z = 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 52.$$

Отже, отримали розв’язок задачі, економічна інтерпретація якого наступна: для отримання максимального доходу у розмірі ***52*** грн підприємству потрібно виготовляти продукцію ***P1*** у кількості ***4*** од. та продукції ***P2*** у кількості ***2*** од.

Приклад 4.2. Побудувати початковий базисний план для задачі лінійного програмування заданої у вигляді:

$$Z = 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 \Rightarrow min$$

$$\begin{aligned} &2x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 5, \\ &8x_1 + 7x_2 - 4x_3 \leq 9, \\ &x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ &x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Розв’язання:

Для зведення даної задачі до канонічної форми потрібно визначення мінімального значення цільової функції Z звести до визначення максимального значення цільової функції **(–*Z*)**. Для зведення обмежень до рівностей від лівої частини першого обмеження відняти невід’ємну змінну x_4, а до лівої частини другого обмеження додати невід’ємну змінну x_5. Додаткові змінні x_4 та x_5 в цільову функцію входять з нульовими коефіцієнтами.

Отримаємо канонічну форму задачі:

$$-Z = -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \Rightarrow max$$

$$\begin{aligned} &2x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ &8x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_5 = 9, \\ &x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ &x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

У першому і третьому обмеженнях неможливо визначити базисні змінні, тому в перше обмеження вводимо штучну змінну x_6, а в третє – штучну змінну x_7. В цільову функцію ці змінні входять з коефіцієнтом **(–*M*)**. В результаті отримаємо:

$$-Z = -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - M \cdot x_6 - M \cdot x_7 \Rightarrow max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \quad + x_6 \quad &= 5, \\ 8x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_5 \quad &= 9, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \quad + x_7 &= 12, \\ x_j \geq 0, \; j = \overline{1,7}. \end{aligned}$$

Для одержання початкового базисного плану прирівняємо до нуля небазисні змінні $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Тоді значення базисних змінних: $x_6 = 5$, $x_5 = 9$, $x_7 = 12$. Підставивши значення базисних змінних в цільову функцію, отримаємо $-Z = -17M$, тобто $Z = 17M$.

Приклад 4.3. Розв’язати задачу із прикладу 1.1 симплекс-методом.

Розв’язання:

Модель задачі має вигляд:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 \Rightarrow max$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &\leq 18, \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 30, \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 20, \\ x_1 \geq 0, \; & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Зведемо задачу до канонічної форми:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \Rightarrow max$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 \quad &= 18, \\ 6x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \quad &= 30, \\ 2x_1 + 4x_2 \quad + x_5 &= 20, \\ x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

Виділимо базисні змінні. Кількість базисних змінних повинна дорівнювати кількості обмежень, тобто трьом. В кожному обмеженні даної задачі можна виділити одну змінну, яка входить лише в дане обмеження з коефіцієнтом $+1$. Відповідно змінні x_3, x_4, x_5 є базисними, а змінні x_1, x_2 – небазисними.

Визначимо початковий базисний план і значення цільової функції: ***x_1=0, x_2=0, x_3=18, x_4=30, x_5=20, Z=0***.

Значення цільової функції ***Z=0·18+0·30=0.***

$X^Б$	$C^Б$	C_j / B	**8**	**10**	**0**	**0**	**0**
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	*0*	18	3	3	1	0	0
x_4	*0*	30	6	3	0	1	0
← x_5	*0*	20	2	4	0	0	1
Індексний рядок		0	-8	-10	0	0	0·
← x_3	*0*	3	3/2	0	1	0	-3/4
x_4	*0*	15	9/2	0	0	1	-3/4
x_2	*10*	5	1/2	1	0	0	1/4
Індексний рядок		50	-3	0	0	0	5/2
x_1	*8*	2	1	0	2/3	0	-1/2
x_4	*0*	6	0	0	-3	1	3/2
x_2	*10*	4	0	1	-1/3	0	1/2
Індексний рядок		56	0	0	2	0	1

Отже, ***x_1=2, x_2=4, x_3=0, x_4=6, x_5=0, Z=56.***

Приклад 4.4. Розв’язати наступну задачу лінійного програмування:

$$Z = 6x_1 + 3x_2 \Rightarrow max$$

$$6x_1 + 3x_2 \geq 24,$$

$$15x_1 - 5x_2 \leq 30,$$

$$-7x_1 + 14x_2 \leq 42,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання:

Зведемо задачу лінійного програмування до канонічної форми:

$$Z = 6x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \Rightarrow max$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - x_3 \quad\quad &= 24, \\ 15x_1 - 5x_2 \quad + x_4 \quad &= 30, \\ -7x_1 + 14x_2 \quad\quad + x_5 &= 42, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

Побудуємо початковий базисний план, використовуючи метод штучного базису:

$$Z = 6x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - M \cdot x_6 \Rightarrow max$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - x_3 \quad\quad + x_6 &= 24, \\ 15x_1 - 5x_2 \quad + x_4 \quad\quad &= 30, \\ -7x_1 + 14x_2 \quad\quad + x_5 \quad &= 42, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{aligned}$$

Початковий базисний план: ***x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=30, x_5=42, x_6=24,*** значення цільової функції ***Z= -24M***.

Побудуємо симплекс-таблицю:

$X^Б$	$C^Б$	B \ C_j	6	3	0	0	0	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	-M	24	6	3	-1	0	0	1
← x_4	0	30	15	-5	0	1	0	0
x_5	0	42	-7	14	0	0	1	0
Індексний рядок		-24M	-6M-6	-3M-3	M	0	0	0
← x_6	-M	12	0	5	-1	- 2/5	0	1
x_1	6	2	1	- 1/3	0	1/15	0	0
x_5	0	56	0	11 2/3	0	7/15	1	0
Індексний рядок		-12M+12	0	-5M-5	M	2/5M+2/5	0	0

$X^Б$	$C^Б$	B \ C_j	***6***	***3***	***0***	***0***	***0***
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	*3*	2 2/5	0	1	- 1/5	- 2/25	0
x_1	*6*	2 4/5	1	0	- 1/15	1/25	0
$\leftarrow x_5$	*0*	28	0	0	2 1/3	1 2/5	1
Індексний рядок		24	0	0	-1	0	0
x_2	*3*	4 4/5	0	1	0	1/25	3/35
x_1	*6*	3 3/5	1	0	0	2/25	1/35
x_3	*0*	12	0	0	1	3/5	3/7
Індексний рядок		36	0	0	0	3/5	3/7

Отже, у четвертій симплекс-таблиці отримали оптимальний розв’язок:

x_1=**3 3/5**, x_2=**4 4/5**, x_3=***12***, x_4=***0***, x_5=***0***, x_6=***0***,
значення цільової функції ***Z= 36***.

Приклад 4.5. До задачі прикладу 1.1. побудувати двоїсту задачу. Провести економічний аналіз використовуваних ресурсів.

Розв’язання:

Запишемо модель задачі 1.1:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 \Rightarrow max$$

$$3x_1 + 3x_2 \le 18,$$

$$6x_1 + 3x_2 \le 30,$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 20,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Введемо наступні позначення: y_1 – ціна одиниці ресурсу ***R1***, y_2 – ціна одиниці ресурсу ***R2***, y_3 – ціна одиниці ресурсу ***R3***. Ціль покупця – мінімізувати вартість всіх видів ресурсів – відобразимо в цільовій функції:

$$L = 18y_1 + 30y_2 + 20y_3 \Rightarrow min.$$

В обмеженнях задачі відобразимо той факт, що підприємство повинно отримати у випадку продажу ресурсів не менше тієї суми, яку воно отримало б при продажу готової продукції:

$$3y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 8,$$

$$3y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 10.$$

Зміст першого обмеження наступний: ціна ресурсів, які йдуть на виготовлення одиниці продукції ***P1*** (ліва частина нерівності), повинна бути не менша від доходу (***8*** грн) від реалізації одиниці продукції ***P1***. Друге обмеження має аналогічний зміст тільки для одиниці продукції ***P2***. До того ж ціна одиниці ресурсу повинна бути невід'ємною величиною, тобто:

$$y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0, \;\; y_3 \geq 0.$$

Отримаємо наступну економіко-математичну модель задачі:

$$L = 18y_1 + 30y_2 + 20y_3 \Rightarrow min$$

$$3y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 8,$$

$$3y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 10,$$

$$y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0, \;\; y_3 \geq 0.$$

Отримана задача є двоїстою до задачі 1.1.

Економічний зміст змінних двоїстої задачі (двоїстих оцінок) полягає у відносній оцінці ресурсів даного підприємства. Ці оцінки є відносними, оскільки одні і ті ж ресурси для різних підприємств мають різну цінність.

Розв'язок побудованих задач запишемо із симплекс-таблиці розв'язання задачі 1.1: $X^*=(2;4;0;6;0)$, $Z=56$, тобто потрібно випускати продукцію ***P1*** у кількості ***2*** одиниці, продукцію ***P2*** – у кількості ***4*** одиниці. Дохід при цьому становитиме ***56*** гривень. Розв'язок двоїстої задачі: $Y^* =(2;0;1;0;0)$, $F=56$. Як видно із розв'язку, перший і третій ресурси використовуються повністю. Їх двоїсті оцінки відмінні від нуля: оцінка ресурсу ***R1*** $y_1^* = 2$, оцінка ресурсу ***R3*** $y_3^* = 1$. Другий ресурс є у надлишку $x_4^* = 6$. Його двоїста оцінка дорівнює нулю $y_2^* = 0$.

Двоїсті оцінки показують, на скільки зміниться цільова функція при зміні відповідного ресурсу на одиницю. Двоїста змінна чисельно дорівнює вкладу в цільову функцію зміни відповідного обмеження ресурсу на одиницю. Збільшення першого ресурсу на одиницю пов'язано із зростанням доходу від реалізації на ***2*** одиниці, другий ресурс – недефіцитний, його збільшення недоцільне, збільшення третього ресурсу на одиницю пов'язано із зростанням доходу від реалізації на ***1*** одиницю.

Приклад 4.6.

Є ***3*** постачальники A_1, A_2, A_3, які мають на складах борошно у кількості відповідно $a_1=110, a_2=120, a_3=170$ тонн, та ***4*** пекарні B_1, B_2, B_3, B_4, потреба яких у борошні становить відповідно $b_1=75, b_2=95, b_3=65, b_4=85$ тонн.

Відома вартість перевезення c_{ij} ***1*** т вантажу від кожного складу A_i до кожної пекарні B_j $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$, яка наведена у таблиці:

		b_1	b_2	b_3	b_4
		75	95	65	85
a_1	110	7 x_{11}	5 x_{12}	4 x_{13}	3 x_{14}
a_2	120	6 x_{21}	4 x_{22}	5 x_{23}	8 x_{24}
a_3	170	5 x_{31}	8 x_{32}	7 x_{33}	4 x_{34}

Визначити, як потрібно перевозити борошно (від якого складу до якої пекарні і в якій кількості), щоб всі потреби у борошні були задоволені, при цьому забезпечивши мінімальні витрати на перевезення.

Розв'язання:

Перевіримо, чи виконується умова балансу мас:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 110 + 120 + 170 = 400,$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 75 + 95 + 65 + 85 = 320.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то необхідно ввести додаткового фіктивного споживача (B_5), який формально буде споживати надлишок запасів, тобто:

$$b_5 = 400 - 320 = 80.$$

У стовпці 5 будуть відображатися фіктивні перевезення, вартість яких буде дорівнювати нулю.

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
		~~75~~	~~60~~ ~~95~~	~~5~~ ~~65~~	~~85~~	~~80~~
a_1	~~35~~ ~~110~~	$\boxed{7}$ 75	$\boxed{5}$ 35	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$
a_2	~~60~~ ~~120~~	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 60	$\boxed{5}$ 60	$\boxed{8}$	$\boxed{0}$
a_3	~~80~~ ~~165~~ ~~170~~	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{4}$ 85	$\boxed{0}$ 80

Знаходимо значення x_{11} із співвідношення:

$$x_{11} = min\{110,75\} = 75.$$

Стовпець $j=1$ виключається із подальшого розгляду, а запас першого постачальника $a_1=110-75=35$.

Знаходимо значення x_{12} із співвідношення:

$$x_{12} = min\{35,95\} = 35.$$

Стрічка $i=1$ виключається із подальшого розгляду, а потреба другого споживача $b_2=95-35=60$.

Знаходимо значення x_{22} із співвідношення:

$$x_{22} = min\{120,60\} = 60.$$

Стовпець $j=2$ виключається із подальшого розгляду, а запас другого постачальника $a_2=120-60=60$.

Знаходимо значення x_{23} із співвідношення:

$$x_{23} = min\{60,65\} = 60.$$

Стрічка $i=2$ виключається із подальшого розгляду, а потреба третього споживача $b_3=65-60=5$.

Знаходимо значення x_{33} із співвідношення:

$$x_{33} = min\{170,5\} = 5.$$

Стовпець $j=3$ виключається із подальшого розгляду, а запас третього постачальника $a_3=170-5=165$.

Знаходимо значення x_{34} із співвідношення:

$$x_{34} = min\{165,85\} = 85.$$

Стовпець $j=4$ виключається із подальшого розгляду, а запас третього постачальника $a_3=165-85=80$.

Залишилися стрічка $i=2$ і стовпець $j=5$: $a_3= b_5=80$, $x_{35} = 80$.

Отримали початковий базисний план: $x_{11} = 75$; $x_{12} = 35$; $x_{22} = 60$; $x_{23} = 60$; $x_{33} = 5$; $x_{34} = 85$; $x_{35} = 80$, всі інші змінні дорівнюють нулю.

Значення цільової функції

$$T = 7 \cdot 75 + 5 \cdot 35 + 4 \cdot 60 + 5 \cdot 60 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 85 + 0 \cdot 80 = 1615.$$

Проведемо перевірку отриманого плану на виродженість. Для того, щоб план був невиродженим, потрібно, щоб кількість заповнених клітинок дорівнювала $m+n-1$, тобто $3+5–1=7$. Оскільки є рівно 7 базисних змінних, то план є невиродженим.

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
		~~75~~	~~95~~	~~15~~ ~~40~~ ~~65~~	~~85~~	~~80~~
a_1	~~25~~ ~~110~~	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 25	$\boxed{3}$ 85	$\boxed{0}$
a_2	~~25~~ ~~120~~	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 95	$\boxed{5}$ 25	$\boxed{8}$	$\boxed{0}$
a_3	~~95~~ ~~170~~	$\boxed{5}$ 75	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$ 15	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 80

Визначимо початковий базисний план методом мінімального елемента:

Змінній x_{14} відповідає клітинка з мінімальною вартістю перевезень $c_{14}=3$, $x_{14} = min\{a_1, b_4\} = min\{110,85\} = 85$. Стовпець $j=4$ виключається із подальшого розгляду, а запас першого постачальника зменшується на 85 одиниць: $a_1=110-85=25$.

В клітинках, що залишилися, змінним x_{13} та x_{22} відповідають клітинки з мінімальними вартостями перевезень $c_{13}=c_{22}=4$. Вибираємо першу клітинку $(1;3)$: $x_{13} = min\{a_1, b_3\} = min\{25,65\} = 25$. Стрічка

i=1 виключається із подальшого розгляду, а потреба третього споживача $b_3=65-25=40$. Вибираємо клітку ***(2;2)***: $x_{22}=min\{a_2,b_2\}=$ $=min\{120,95\}=95$. Стовпець ***j=2*** виключається із подальшого розгляду, а запас другого постачальника зменшується на ***95*** одиниць: $a_2=120-95=25$.

В клітинках, що залишилися, змінним x_{23} та x_{31} відповідають клітинки з мінімальними вартостями перевезень $c_{23}=c_{31}=5$. Вибираємо першу клітинку ***(2;3)***: $x_{23}=min\{a_2,b_3\}=min\{25,40\}=25$. Стрічка ***i=2*** виключається із подальшого розгляду, а потреба третього споживача $b_3=40-25=15$. Вибираємо клітку ***(3;1)***: $x_{31}=min\{a_3,b_1\}=min\{170,75\}=75$. Стовпець ***j=1*** виключається із подальшого розгляду, а запас третього постачальника зменшується на ***75*** одиниць: $a_3=170-75=95$.

Оскільки в таблиці залишились одна стрічка ***i=3*** і два стовпці ***j=3*** та ***j=5***, то це останній крок, заповнюємо клітинки $x_{33}=15$ та $x_{35}=80$.

Отримали початковий базисний план:
$x_{13}=25$; $x_{14}=85$; $x_{22}=95$; $x_{23}=25$; $x_{31}=75$; $x_{33}=15$; $x_{35}=80$, всі інші змінні дорівнюють нулю.

Значення цільової функції

$$T=4\cdot 25+3\cdot 85+4\cdot 95+5\cdot 25+5\cdot 75+7\cdot 15+0\cdot 80=1340.$$

Подальше розв'язання проведемо за алгоритмом методу потенціалів, використовуючи формули (4.27)-(4.30). Процес розв'язання відобразимо в таблицях:

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
		75	95	65	85	80	
a_1	110	$\boxed{7}$ -5	$\boxed{5}$ -2	+ $\boxed{4}$ 25	- $\boxed{3}$ 85	$\boxed{0}$ -3	$u_1=0$
a_2	120	$\boxed{6}$ -3	$\boxed{4}$ 95	$\boxed{5}$ 25	$\boxed{8}$ -4	$\boxed{0}$ -2	$u_2=1$
a_3	170	$\boxed{5}$ 75	$\boxed{8}$ -2	- $\boxed{7}$ 15	+ $\boxed{4}$ 2	$\boxed{0}$ 80	$u_3=3$
		$v_1=2$	$v_2=3$	$v_3=4$	$v_4=3$	$v_5=-3$	

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
		75	**95**	**65**	**85**	**80**	
a_1	**110**	$\boxed{7}$ -3	$\boxed{5}$ -2	$\boxed{4}$ 40	$\boxed{3}$ 70	$\boxed{0}$ -1	$u_1=0$
a_2	**120**	$\boxed{6}$ -1	$\boxed{4}$ 95	$\boxed{5}$ 25	$\boxed{8}$ -4	$\boxed{0}$ 0	$u_2=1$
a_3	**170**	$\boxed{5}$ 75	$\boxed{8}$ -4	$\boxed{7}$ -3	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{0}$ 80	$u_3=1$
		$v_1=4$	$v_2=3$	$v_3=4$	$v_4=3$	$v_5=-1$	

В останній таблиці всі оцінки $d_{ij} \le 0$, отже отриманий план – оптимальний.

$x_{11} = 0$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 40$; $x_{14} = 70$;

$x_{21} = 0$; $x_{22} = 95$; $x_{23} = 25$; $x_{24} = 0$;

$x_{31} = 75$; $x_{32} = 0$; $x_{33} = 0$; $x_{34} = 15$;

$x_{35} = 80$, тобто у третього постачальника ***80*** одиниць продукції залишається (5-й споживач – фіктивний).

Значення цільової функції

$$T = 4 \cdot 40 + 3 \cdot 70 + 4 \cdot 95 + 5 \cdot 25 + 5 \cdot 75 + 4 \cdot 15 + 0 \cdot 80 = 1310.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

Задача 4.1. Розв'язати задачу графічним методом.

$$30x_1 + 40x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.2. Розв'язати задачу графічним методом.

$$x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.3. Розв'язати задачу графічним методом.

$$3x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.4. Розв'язати задачу графічним методом.

$$5x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.5. Розв'язати задачу графічним методом.

$$3x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 1{,}5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.6. Розв'язати задачу графічним методом.

$$x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.7. Розв'язати задачу графічним методом.

$$x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 + 6x_2 \ge 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.8. Розв'язати задачу симплекс-методом.

$$30x_1 + 40x_2 + 45x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 76, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 73, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 83, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.9. Розв'язати задачу симплекс-методом.

$$2x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 1/2, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.10. Розв'язати задачу симплекс-методом.

$$7x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 505, \\ x_1 + x_2 \le 131, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 348, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.11. Розв'язати задачу симплекс-методом.

$$108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 80, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 60, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.12. Розв'язати задачу симплекс-методом.

$$3x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.13. Для даної задачі побудувати двоїсту задачу. Розв'язати одну з пари двоїстих задач симплекс-методом та записати оптимальний розв'язок обох задач.

$$30y_1 + 4y_2 + y_3 \to max$$

$$\begin{cases} 14y_1 + 2y_2 \le 10, \\ 10y_1 + y_3 \le 14, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.14. Для даної задачі побудувати двоїсту задачу. Розв'язати одну з пари двоїстих задач симплекс-методом та записати оптимальний розв'язок обох задач.

$$16x_1 + 12x_2 + 15x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 10, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.15. Для даної задачі побудувати двоїсту задачу. Розв'язати одну з пари двоїстих задач симплекс-методом та записати оптимальний розв'язок обох задач.

$$15x_1 + 20x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 24, \\ 3x_1 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.16. Для даної задачі побудувати двоїсту задачу. Розв'язати одну з пари двоїстих задач симплекс-методом та записати оптимальний розв'язок обох задач.

$$24x_1 + 20x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_1 + 2x_2 \le 50, \\ x_1 + x_2 \le 40, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.17. Для даної задачі побудувати двоїсту задачу. Розв'язати одну з пари двоїстих задач симплекс-методом та записати оптимальний розв'язок обох задач.

$$10y_1 + 4y_2 + 5y_3 \to min$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 6, \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 4, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 10, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 4.18. Підприємство "Молочні ріки" підписало контракти із трьома фермерськими господарствами про постачання молока на заводи підприємства. Відповідно до контрактів постачальники повинні постачати щоденно по ***700*** л молока. Потреба заводів у молоці наведено у таблиці:

Завод	***Завод 1***	***Завод 2***	***Завод 3***	***Завод 4***	***Завод 5***
Потреба у молоці, л	250	480	360	540	470

Вартість перевезення молока (в розрахунку на ***1*** л) від фермерських господарств до заводів наведена у таблиці:

Завод / ***Фермерське господарство***	***Завод 1***	***Завод 2***	***Завод 3***	***Завод 4***	***Завод 5***
Фермерське господарство I	0,3	0,4	0,1	0,2	0,4
Фермерське господарство II	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2
Фермерське господарство III	0,4	0,3	0,2	0,4	0,3

Розробити такий план перевезення молока від фермерських господарств до заводів, що забезпечує виконання всіх умов договору із мінімальними витратами на перевезення.

Задача 4.19. Компанія контролює три фабрики ***A1, A2, A3,*** здатні виготовляти ***150, 60*** та ***80*** тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками ***B1, B2, B3, B4,*** яким потрібно щотижня відповідно ***110, 40, 60*** та ***80*** тис. од. продукції. Вартість транспортування ***1000*** од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	***Вартість транспортування 1000 од. продукції за замовниками***			
	B1	***B2***	***B3***	***B4***
A1	4	4	2	5
A2	5	3	1	2
A3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг.

Задача 4.20. Агропромислове об'єднання складається з трьох господарств ***A1, A2, A3,*** що спеціалізуються на вирощуванні ранніх овочів. Кожне господарство щотижня збирає відповідно ***50***, ***30*** та ***20*** т овочів, які необхідно відправляти в чотири магазини ***B1, B2, B3, B4***. Магазини бажають отримувати ранні овочі в кількості відповідно ***30***, ***30***, ***10*** та ***20*** т. Вартість перевезення ***1*** т овочів від господарства до магазинів наведено в таблиці.

Господарство	***Вартість перевезення 1 т овочів у магазини***			
	B1	***B2***	***B3***	***B4***
A1	2	3	4	2
A2	5	7	1	4
A3	9	4	3	2

Визначити такий план перевезення овочів до магазинів, за якого загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Задача 4.21. Хлібопекарня „Колосок” для виготовлення хліба використовує пшеничне та житнє борошно. Для виготовлення однієї хлібини „Духмяний” потрібно ***300*** г пшеничного борошна та ***100*** г житнього борошна, для однієї хлібини „Львівський” – ***200*** г пшеничного борошна та ***200*** г житнього борошна. Тижневий запас пшеничного борошна – ***1000*** кг, житнього – ***600*** кг. Прибуток від продажу однієї штуки хліба „Духмяний” становить ***1*** грн, однієї штуки хліба „Львівський” – ***80*** коп.

Визначити скільки штук кожного виду хліба потрібно випікати для максимізації тижневого прибутку підприємства.

Задача 4.22.

ТзОВ „Бібльос” виготовляє три види продукції: зошити, альбоми і блокноти, використовуючи фарбу, папір, скріпки. Матриця затрат ресурсів на виробництво одиниці продукції наступна:

Ресурси / **Продукція**	**Фарба, л**	**Папір, кг**	**Скріпки, шт.**
Зошит	0,26	0,45	4
Альбом	0,12	0,55	2
Блокнот	0,1	0,2	2

На складі є ***10 000*** л фарби, ***20*** т паперу та ***175*** тис. скріпок. Прибуток від продажу зошита становить ***6*** грн, альбому – ***3*** грн, блокнота – ***2,5*** грн. Потрібно скласти виробничу програму підприємства, яка б максимізувала прибуток ТзОВ „Бібльос”.

Задача 4.23.

Підприємство “Квітучий сад” випускає набори добрив для кімнатних рослин: “Зелемінь” та “Семираміда”. В набір “Зелемінь” входять ***300*** г азотних, ***400*** г фосфорних і ***100*** г калійних добрив, в набір “Семираміда” – ***200*** г азотних, ***600*** г фосфорних і ***300*** г калійних добрив. Відомо, що для обробки зимового саду потрібно щонайменше ***1*** кг азотних, ***2*** кг фосфорних і ***700*** г калійних добрив. Набір “Зелемінь” коштує ***30*** грн, набір “Семираміда” – ***40*** грн.

Яких і скільки добрив потрібно купити, щоб забезпечити ефективне живлення ґрунту і мінімізувати затрати?

Задача 4.24.

Для перевезення пасажирів та пошти Укрзалізниця формує пасажирські та швидкі потяги. Кількість вагонів у потязі, місткість вагонів та наявний парк вагонів на станції вказані в таблиці.

Характеристика парку вагонів

	Тип вагону			
	Багажний	**Плацкартний**	**Купейний**	**М'який**
Швидкий	1	4	7	3
Пасажирський	2	8	4	1
Місткість вагонів, чол	–	54	36	18
Наявний парк вагонів	14	81	70	27

Знайти, яку кількість швидких і пасажирських потягів необхідно сформувати, щоб максимізувати обсяг пасажирських перевезень.

Задача 4.25.

Кондитерська фірма „Насолода" виробляє три види шоколаду (чорний, молочний, білий), використовуючи для цього какао, молоко, цукор та ароматизатор. Затрати ресурсів на виготовлення одного кілограма шоколаду кожного виду, запаси ресурсів та вартість ***1*** кг продукції кожного виду наведено у таблиці:

Вид ресурсу	**Шоколад**			**Обсяг ресурсів, кг**
	Чорний	**Молочний**	**Білий**	
Какао, кг	0,72	0,51	0,17	1500
Молоко, кг	0,15	0,32	0,65	1000
Ароматизатор, кг	0,11	0,18	0,15	400
Цукор, кг	0,4	0,6	0,8	1800
Ціна, грн	60	58	55	

Визначити план виробництва продукції, який би максимізував товарну продукцію підприємства.

Задача 4.26.

ЗАТ „Крафт Фудз” виготовляє чотири види чіпсів („Ніжний сир”, „Курка гриль”, „Духмяні гриби”, „Смажений бекон”), використовуючи для цього картоплю, олію рослинну, пшеничне борошно та ароматизатори. Затрати ресурсів на виготовлення одного кілограма чіпсів кожного виду, запаси ресурсів та вартість ***1*** кг продукції кожного виду наведено у таблиці:

Вид ресурсу	**Чіпси**				**Обсяг ресурсів, кг**
	„Ніжний сир”	**„Курка гриль”**	**„Духмяні гриби”**	**„Смажений бекон”**	
Картопля, кг	1,4	1,5	1,45	1,5	10000
Олія рослинна, кг	0,13	0,15	0,14	0,15	1000
Пшеничне борошно, кг	0,2	0,1	0,15	0,15	1000
Ароматизатори, кг	0,05	0,06	0,08	0,07	450
Собівартість, грн/кг	6	6,6	7,2	7	

Підприємство має підписані договори на постачання ***1000*** кг чіпсів „Ніжний сир”, ***2000*** кг чіпсів „Курка гриль”, ***500*** кг чіпсів „Духмяні гриби”, ***3000*** кг чіпсів „Смажений бекон”.

Визначити план виробництва продукції, який би забезпечив виконання умов договору з мінімізацією собівартості продукції підприємства.

Задача 4.27.

Скласти оптимальний добовий раціон для відгодівлі свиней, жива вага який складатиме ***30–40*** кг. Раціон однієї свині повинен містити ***2,4*** кг кормових одиниць, ***270*** г протеїну. Раціон складають із двох видів концентрованих кормів: ячменю і бобів. В ***1*** кг ячменю міститься ***0,72*** кг кормових одиниць і ***80*** г протеїну; в 1 кг бобів – відповідно ***0,55*** кг і ***280*** г. Ціна ***1*** кг ячменю – ***5*** грн, бобів – ***7,6*** грн.

Критерій оптимальності – мінімум вартості раціону.

Задача 4.28.

Фармацевтична фірма „Здорове життя” виготовляє харчову добавку „Геракл” із кукурудзяного та соєвого борошна. Вміст поживних речовин у ***1*** кг борошна та вартість ***1*** кг борошна наведено в таблиці.

Поживні речовини / Борошно	**Білок, кг**	**Клітковина, кг**	**Вартість борошна, грн/кг**
Кукурудзяне	0,09	0,02	1,5
Соєве	0,6	0,06	4,5

Дієтологи вимагають, щоб в харчовій добавці було не менше ***30***% білка і не більше ***5***% клітковини. Для задоволення попиту споживачів фірма повинна випускати щоденно не менше ***80*** кг харчової добавки. Необхідно визначити рецептуру суміші мінімальної вартості з врахуванням вимог дієтологів.

Задача 4.29.

Молода дівчина вирішила схуднути і звернулась за допомогою до подруги. Подруга порадила їй перейти на дієтичне харчування, яке складається лише з чотирьох продуктів. В таблиці наведено вміст в ***100*** г даних продуктів білків, жирів, вуглеводів та їх калорійність.

Вміст поживних речовин у 100 г продуктів харчування

	Продукт A	***Продукт B***	***Продукт C***	***Продукт D***
Білки, од.	3	1,9	7,1	11
Жири, од.	1,5	19	6,2	1,5
Вуглеводи, од.	12	1,3	51	72,7
Калорійність, кКал	96	198	305	350

Вартість ***1*** кг продукту A становить ***6*** грн, продукту B – ***8*** грн, продукту C – ***20*** грн, продукту D – ***21*** грн.

Для повноцінного функціонування організму денний раціон харчування повинен містити:

білків – не менше ***50*** і не більше ***200*** одиниць;

жирів – не менше ***5*** і не більше ***30*** одиниць;

вуглеводів – не менше ***150*** і не більше ***500*** одиниць;

калорій – не менше ***1400*** і не більше ***2500*** одиниць.

Визначити, в якій кількості дівчині потрібно споживати продукти, щоб витратити якомога менше грошей та дотриматись умов дієти.

Задача 4.30.

У ресторані „Бахус” щоденно замовляють ***60*** фірмових коктейлів (по ***0,25*** л). З настанням сезону новорічних та різдвяних святкувань передбачають, що кількість замовлень збільшиться в середньому на ***10*** порцій. Згідно рецепту в складі коктейлю повинно бути:

– не менше ***20***%, але не більше ***35***% спирту;
– не менше ***2***% цукру;
– не більше ***5***% домішків;
– не менше ***7***% і не більше ***12***% соку.

В таблиці наведено процентний склад напоїв, з яких змішується коктейль, та їх кількість, яку ресторан може щоденно виділяти для виготовлення коктейлю.

Процентний склад та запаси напоїв

Напій	**Спирт**	**Вода**	**Цукор**	**Домішки**	**Кількість, л/добу**
Горілка	40%	57%	1%	2%	5
Вино	18%	67%	9%	6%	20
Сік	0%	88%	8%	4%	4

Визначити, чи вистачить ресторану наявних щоденних запасів напоїв для задоволення попиту на коктейль.

Питання для контролю

1. Запишіть загальну лінійну оптимізаційну математичну модель.
2. Які Ви знаєте форми запису лінійних оптимізаційних задач?
3. Дайте геометричну інтерпретацію лінійних оптимізаційних моделей.
4. В чому суть графічного методу розв’язування ЗЛП?
5. Назвіть основні властивості розв’язків задачі лінійного програмування.
6. В чому суть методу штучного базису?
7. В чому суть симплексного методу розв’язування задач лінійного програмування?
8. Дайте геометричну інтерпретацію симплексного методу.
9. Опишіть алгоритм розв’язування задачі лінійного програмування симплексним методом.
10. Що таке двоїсті задачі?
11. Розкажіть правила побудови двоїстих моделей оптимізаційних задач.
12. Дайте економічну інтерпретацію пари двоїстих задач лінійного програмування.
13. Запишіть теореми двоїстості та розкажіть їх економічний зміст.
14. Наведіть приклади застосування теорії двоїстості для знаходження оптимальних планів прямої та двоїстої оптимізаційних задач.
15. Запишіть економіко-математичну модель транспортної задачі.
16. Які Ви знаєте методи побудови початкового базисного плану ТЗ?
17. В чому суть методу північно-західного кута?
18. Розкрийте суть методу мінімального елемента.
19. Розкажіть алгоритм розв'язування транспортної задачі.
20. Наведіть приклади застосування транспортної задачі до розв’язування різних економічних задач.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці. Навч. пос. / О.В. Боровик, Л.В. Боровик – К. : ЦУЛ, 2007. – 424 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: Учеб. пособие для вузов / Е.С. Венцтель – 3-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2004. – 208 с.
3. Вітлінський В.В. Математичне програмування – Навчально-методичний посібник для самост. вивч. дисц. / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О.Терещенко – вид. 2-ге без змін – Київ : КНЕУ, 2006. – 248 с.
4. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посіб. / В.В. Вітлінський – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.
5. Вовк В.М. Основи системного аналізу. Навч. посібник / В.М. Вовк, З.Б. Дрогомирецька – Львів : ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 248 с.
6. Дацко М.В. Дослідження операцій. Навч. пос. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів : “ПАЇС”, 2009. – 288 с.
7. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Ю.П. Зайченко – Київ : ЗАТ “Віпол”, 2000. – 688 с.
8. Карагодова О.О. Дослідження операцій: Навч. пос. / О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок – К. : ЦУЛ, 2007. – 256 с.
9. Катренко А.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник / А.В. Катренко – Львів : “Магнолія-2006”, 2007. – 480 с.
10. Математичні моделі в менеджменті та маркетингу: Навч. посібник / [С.К. Рамазанов, Н.О. Рязанцева, Т.В. Ляшенко та ін.] – Луганськ : СПД Резніков В.С., 2010. – 311 с.
11. Максишко Н.К. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / Н. К. Максишко, М.В. Негрей. – Київ: Компринт, 2015. – 336 с.
12. Наконечний С.І. Математичне програмування: Навч. посіб. / С.І. Наконечний, С.С. Савіна – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.
13. Терехов Л.Л. Економіко-математичні методи і моделі. Навч. посібник / Л.Л. Терехов – К. : ВПД “Формат”, 2008. – 292 с.
14. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. Підручник для студ. вузів / О.В. Ульянченко – Харків : Гриф, 2002. – 580 с.
15. Федоренко І.К. Дослідження операцій в економіці: Підручник / І.К. Федоренко, О.І. Черняк – К. : Знання, 2007. – 558 с.

ТЕМА 5

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ І РИЗИКУ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

Найбільш поширеною моделлю прийняття рішень в умовах невизначеності є статична модель, породжена теоретико-ігровою концепцією [3, 12].

Згідно концепцією теорії гри ситуація прийняття рішень характеризується множиною $\{X;\Theta;F\}$.

X – множина рішень (стратегій) суб'єкта керування (*1*-го гравця);

Θ – множина станів (стратегій) економічного середовища (*2*-го гравця);

$F=\{f(x,\theta), x\in X, \theta\in\Theta\}$ – функціонал оцінювання, визначений на множині $X\times\Theta$;

$f(x,\theta)$ – функція виграшу першого гравця (суб'єкта керування).

Під економічним середовищем розуміють сукупність невизначених чинників (в тому числі і економічних), які впливають на ефективність рішення, що приймається.

У дискретному випадку економічне середовище являє собою групу випадкових подій $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\}$ з ймовірностями їх настання відповідно:

$$p(\Theta)=p(\theta_1)+p(\theta_2)+...+p(\theta_n)=p_1+p_2+...+p_n=1.$$

У випадку, коли множина стратегій суб'єкта керування $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ та множина станів економічного середовища $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\}$ є дискретними, функціонал оцінювання задається матрицею, яка представлена у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2.

B / A	$\boldsymbol{\theta_1}$	$\boldsymbol{\theta_2}$	....	$\boldsymbol{\theta_n}$
$\boldsymbol{x_1}$	f_{11}	f_{12}	....	f_{1n}
$\boldsymbol{x_2}$	f_{21}	f_{22}	....	f_{2n}
....	....	....	....	....
$\boldsymbol{x_m}$	f_{m1}	f_{m2}	....	f_{mn}

Елемент матриці f_{ij} – це кількісна оцінка рішення $x_i\,(x_i \in X)$ при умові, що економічне середовище перебуває у стані $\theta_j\,(\theta_j \in \Theta)$.

Вважають, що функціонал оцінювання F має позитивний інгредієнт, якщо намагаються досягти $\max\limits_{x_i \in X}\{f_{ij}\}$, для цих випадків записують:

$$F = F^{+} = \{f_{ij}^{+}\}.$$

Для негативного інгредієнта, якщо намагаються досягти $\min\limits_{x_i \in X}\{f_{ij}\}$, відповідно записують:

$$F = F^{-} = \{f_{ij}^{-}\}.$$

Функція ризику

Функція ризику визначається як лінійне перетворення позитивного чи негативного заданого інгредієнта функціоналу оцінювання до відносних одиниць вимірювання.

1. Для $F = F^{+}$, коли мають зафіксований стан економічного середовища $\theta_j \in \Theta$ знаходять величину

$$l_j^{\max} = \max_{x_i \in X}\{f_{ij}^{+}\},\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}). \qquad (5.3)$$

Функція ризику тоді визначається у вигляді:

$$r_{ij} = l_j^{\max} - f_{ij}^{+},\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}). \qquad (5.4)$$

2. Для $F = F^{-}$, при фіксованих знаходять величину

$$l_j^{\min} = \min_{x_i \in X}\{f_{ij}^{-}\},\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}). \qquad (5.5)$$

Функція ризику тоді визначається так:

$$r_{ij} = f_{ij}^{-} - l_j^{\min},\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}). \qquad (5.6)$$

У дискретному випадку, коли $X = \{x_1, x_1, ... x_m\}$ та $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\}$, у якості функціоналу оцінювання використовують *матрицю ризику*:

$$R^{-} = \{r_{ij}^{-} = r^{-}(x_i, \theta_j),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\}.$$

Вона дає змогу оцінити рішення, що відрізняються, та встановити, наскільки вигідно реалізуються в них існуючі можливості досягнення успіху за наявності ризику. А тому її ще називають *матрицею невикористаних можливостей*.

Якість рішення, яке приймається, а також методика його прийняття залежить від ступеню інформованості суб'єкта керування.

Під *інформаційною ситуацією* (ІС) з погляду суб'єкта керування (залежно від ступеню його інформованості) розуміють певний ступінь градації невизначеності вибору середовищем своїх станів у момент прийняття рішення.

Класифікатор ІС, пов'язаних з невизначеністю середовища, можна побудувати так [3, 12]:

I_1 – характеризується заданим розподілом апріорних імовірностей на елементах множини Θ (достатня за обсягом інформація).

I_2 – характеризується заданим законом розподілу ймовірності з точністю до невідомих параметрів (достатня за обсягом інформація, висунута гіпотеза щодо класу функцій, якому належить функція щільності розподілу ймовірності і на основі наявної інформації необхідно оцінити параметри, що характеризують цей клас функцій).

I_3 – характеризується заданою системою (лінійних чи нелінійних) співвідношень на компонентах апріорного розподілу ймовірностей станів ЕС (обсяг інформації про ЕС недостатній).

I_4 – характеризується невідомим розподілом ймовірностей на елементах множини Θ (інформація про ЕС відсутня).

I_5 – характеризується антагоністичними інтересами ЕС у процесі прийняття рішень (обсяг інформації про ЕС достатній).

I_6 – характеризується як проміжна між I_1 та I_5 при виборі економічним середовищем своїх станів.

Таким чином, наведені інформаційні ситуації є глобальними характеристиками ступеню невизначеності станів ЕС з погляду суб'єкта керування.

Предметом теорії прийняття рішень в умовах невизначеності та зумовленого нею ризику є дослідження законів перетворення апріорної та апостеріорної інформації про стан об'єкта та ЕС в кількісні складові інформації керування, притаманні різним суб'єктам керування та різним керованим економічним об'єктам (системам).

Основними поняттями (категоріями) теорії прийняття рішень є: система керування; керований об'єкт; суб'єкт керування та прийняття рішень; економічне середовище; стан об'єкта та середовища; рішення, що приймається; невизначеність та зумовлений нею ризик; функціонал оцінювання (матриця значень ФО); ситуація прийняття рішення; інформаційна ситуація; джерело інформації; критерії прийняття рішень.

Для дослідження статистичних моделей прийняття рішень в умовах невизначеності та зумовленого нею ризику виходять із схеми, що передбачає наявність:

1. Ідентифікованого ЕС, для якого визначена множина станів $\theta_j \in \Theta \; (j = \overline{1,n})$, однак у момент прийняття рішень суб'єктові керування невідомо, у якому стані перебуватиме ЕС.

2. У суб'єкта керування:

а) множини рішень $x_i \in X$, одне з яких йому необхідно прийняти;

б) функціоналу оцінювання $F = \{f(x_i, \theta_j)\}$, що характеризує „виграш" чи „програш" при виборі рішення $x_i \in X$, якщо ЕС перебуває у стані $\theta_j \in \Theta$.

Творча складова процесу прийняття рішень в умовах ризику складається з таких кроків:

1. Формування множини рішень X та множини станів Θ економічного середовища.

2. Визначення та формалізація основних показників ефективності корисності, що входять у функціонал оцінювання $F = \{f_{ij}\}$.

3. Визначення ІС, що характеризує стратегію поводження ЕС.

4. Вибір критерію прийняття рішення з множини критеріїв, що є характерними для обраної (ідентифікованої) ІС.

5. Прийняття оптимального рішення за обраним критерієм.

Формальна складова процесу прийняття рішень в умовах ризику складається з таких двох кроків:

1. Проведення розрахунків за існуючими алгоритмами показників ефективності, що входять у визначення функціоналу оцінювання.

2. Проведення розрахунків щодо знаходження оптимального розв’язку $x^* \in X$ (чи множини таких розв’язків $X^* \subset X$) згідно з обраним критерієм прийняття рішення.

Критерії прийняття рішень
у різних інформаційних ситуаціях

Під критерієм прийняття рішень розуміють алгоритм, який визначає для кожної ситуації прийняття рішення $\{X;\Theta;F\}$ та інформаційної ситуації єдине оптимальне рішення (розв’язок) $x^* \in X$ чи множину таких розв’язків $X^* \subset X$.

Розглянемо найбільш вживані критерії прийняття рішень для деяких інформаційних ситуацій [3, 7, 9, 12, 17, 20].

1. Інформаційна ситуація I_1.

I_1 має місце тоді, коли відомий розподіл ймовірностей станів ЕС:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n), \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Ця ситуація є найбільш розповсюдженою в більшості практичних задач прийняття рішень в умовах ризику.

Розглянемо деякі з основних критеріїв прийняття рішень, що можуть використовуватись у полі цієї ІС.

а) критерій Байєса.

Критерій Байєса також називають критерієм середньозваженого (сподіваного) прибутку, затрат, ризику тощо.

Згідно з критерієм Байєса у випадку, коли $F = F^+$, оптимальним рішенням x_i^* вважається таке, для якого математичне сподівання відповідного вектора оцінювання досягає найбільш можливого значення, тобто x_i^* знаходять виходячи з умови:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X} B^+(x_i;P) = \max_{x_i \in X} M(F_i^+) = \max_{x_i \in X} \sum_{j=1}^{n} p_j f_{ij}^+ . \qquad (5.7)$$

Коли $F = F^-$, x_i^* визначається з умови:

$$x_i^* = \min_{x_i \in X} B^-(x_i; P) = \min_{x_i \in X} M(F_i^-) = \min_{x_i \in X} \sum_{j=1}^{n} p_j f_{ij}^- . \qquad (5.8)$$

Якщо максимум досягається на кількох рішеннях з множини X (множину яких позначають X^*), то такі рішення називають еквівалентними відносно даного критерію.

Описаний підхід до визначення оптимальної стратегії в теорії статистичних рішень називається байєсівською стратегією.

Величина $B^+(x_i; P)$ або $B^-(x_i; P)$ називається байєсівською оцінкою рішення x_i. Якщо функціонал оцінювання задано в ризиках, то величину $B^-(x_i; P)$ називають *байєсівським ризиком* рішення $x_i \in X$.

б) модальний критерій.

У випадку, коли $F = F^+$, оптимальне рішення x_i^* знаходять з умови:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X} f^+(x_i; M_0(\theta)), \qquad (5.9)$$

де $M_0(\theta)$ – мода випадкової величини θ.

У дискретному випадку $M_0(\theta)$ відповідає стану ЕС, ймовірність настання якого є найбільшою, в неперервному випадку – точці максимуму функції щільності розподілу ймовірності.

У випадку, коли $F = F^-$, x_i^* визначається з умови:

$$x_i^* = \min_{x_i \in X} f^-(x_i; M_0(\theta)). \qquad (5.10)$$

в) критерій мінімальної дисперсії.

У випадку, коли $F = F^+$ або $F = F^-$, оптимальне рішення x_i^* задовольняє умову:

$$x_i^* = \min_{x_i \in X} D^-(x_i; P), \qquad (5.11)$$

де $D^-(x_i; P) = \sum_{j=1}^{n} p_j (f_{ij}^{\pm} - B^{\pm}(x_i; P))^2$ – величина дисперсії для рішення x_i.

2. Інформаційна ситуація I_4.

Для цієї ІС характерним є повне незнання закону розподілу ймовірностей станів ЕС. А тому вибір розподілу має базуватись на певних припущеннях (гіпотезах).

У якості одного з таких допущень можна використати принцип Бернуллі-Лапласа (принцип недостатніх підстав), згідно з яким можливі стани ЕС розглядаються як рівноймовірні випадкові події, якщо відсутня інформація про умови, за яких кожен стан може відбуватися.

Вектор ймовірностей $\hat{p}$ настання n станів економічного середовища має наступний вигляд для даної інформаційної ситуації:

$$\hat{p} = \left\{ \frac{1}{n}; \frac{1}{n}; ...; \frac{1}{n} \right\} \tag{5.12}$$

Критерій Бернуллі-Лапласа ґрунтується на застосуванні критерію Байєса та принципі недостатніх підстав для одержання оцінок апріорних ймовірностей. Згідно з цим критерієм у випадку, коли $F = F^+$, оптимальним є рішення:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X} B^+(x_i; \hat{p}) = \max_{x_i \in X} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^+ \right). \tag{5.13}$$

Аналогічно будується критерій у випадку, коли ФО має негативний інгредієнт $F = F^-$:

$$x_i^* = \min_{x_i \in X} B^-(x_i; \hat{p}) = \min_{x_i \in X} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^- \right). \tag{5.14}$$

3. Інформаційна ситуація I_5.

Ця інформаційна ситуація характеризується антагоністичними інтересами ЕС щодо суб’єкта керування у процесі прийняття ним рішень. На відміну від пасивного ЕС (у I_1–I_4) I_5 є активним ЕС, тобто таким, що активно протидіє досягненню найбільшої ефективності рішень, які приймаються суб’єктом керування. Це досягається шляхом вибору таких станів, які зводять до мінімуму ефективність процесу управління.

Основною стратегією для суб’єкта керування в полі I_5 є забезпечення собі гарантованих рівнів значень функціоналу оцінювання, тобто зведення ризику до нуля. Таким чином, у ситуації I_5 невизначеність цілком обумовлена тим, що суб’єктові керування невідомо, у якому стані перебуває ЕС. Але в теоретичній моделі ступінь невизначеності зменшена в силу припущення, що ЕС є антагоністичним по відношенню до суб'єкта керування.

а) критерій Вальда.

Коли $F = F^{+}$, то оптимальне (безризикове) рішення x_i^* вибираємо згідно принципу максиміну. Схема процесу прийняття оптимального рішення така: кожному рішенню $x_i \in X$ присвоюють, як показник, його гарантований рівень, який відповідає мінімальній за станами ЕС компоненті відповідного вектора оцінювання $F_i^{+} = \left\{ f_{i1}^{+}, f_{i2}^{+}, ..., f_{in}^{+} \right\}$. Тобто, згідно з критерієм Вальда оптимальним є рішення:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X} \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^{+}. \qquad (5.15)$$

У випадку, коли $F = F^{-}$, оптимальне рішення знаходиться згідно з принципом мінімаксу, а саме:

$$x_i^* = \min_{x_i \in X} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^{-}. \qquad (5.16)$$

Критерій Вальда має ту перевагу, що він надзвичайно консервативний, тобто безризиковий у такій ситуації, де недоцільно ризикувати.

б) критерій домінуючого результату.

Коли $F = F^{+}$, то згідно з критерієм домінуючого результату оптимальне рішення забезпечується максимаксною (*maxmax*) стратегією:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^{+}. \qquad (5.17)$$

У випадку, коли $F = F^{-}$, оптимальне рішення забезпечується мінімінною (minmin) стратегією:

$$x_i^* = \min_{x_i \in X} \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^{-}. \qquad (5.18)$$

Доцільність самостійного використання цього критерію при прийнятті рішень є досить проблематичною. В основному він використовується як складова частина при побудові складних моделей прийняття багатоцільових рішень, які розглядатимуться в наступній темі.

в) критерій мінімального ризику Севіджа.

Цей критерій відповідає принципові мінімаксу. Початковим моментом для використання критерію Севіджа є перехід від функціоналу оцінювання $F^{\pm}$ до матриці ризику R^{-}. Тоді слід приймати рішення:

$$x_i^* = \min_{x_i \in X} \max_{\theta_j \in \Theta} r_{ij}^{-}. \qquad (5.19)$$

4. Інформаційна ситуація I_6.

Ця ситуація характеризується наявністю чинників, що зумовлюють ”проміжну” між I_1, I_2, I_3, I_4, та I_5 поведінку ЕС.

Класичними прикладами критеріїв прийняття компромісних рішень в полі I_6 є критерій Гурвіца, модифіковані критерії та критерій Ходжеса-Лемана. Критерій Гурвіца та модифіковані критерії використовуються для прийняття компромісного рішення в полі однієї інформаційної ситуації, критерій Ходжеса-Лемана – в полях двох різних інформаційних ситуацій. Згадані критерії прийняття рішень можна розглядати як часткові випадки загальної моделі прийняття багатоцільових та багатокритеріальних рішень.

а) критерій Гурвіца.

Критерії Вальда та Севіджа песимістичні в тому сенсі, що з кожним рішенням вони поєднують стан середовища, яке призводить до гарантованих (безризикових) наслідків для прийнятого суб’єктом керування рішення. Для моделювання поведінки середовища, що вважається найкращим для суб’єкта керування, Гурвіц запропонував використовувати зважену комбінацію найкращого та найгіршого. Такий підхід до вибору рішень відомий як критерій показника песимізму-оптимізму.

Згідно з критерієм Гурвіца у випадку, коли $F = F^{+}$, оптимальним є рішення:

$$x_i^* = G^{+}(x_i^*;\lambda) = \max_{x_i \in X} G^{+}(x_i;\lambda), \qquad (5.20)$$

де $G^{+}(x_i;\lambda) = (1-\lambda)\max_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^{+} + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^{+}; \qquad \lambda \in [0;1].$

Величину $G_{i\lambda}^{+} = G^{+}(x_i;\lambda)$ називають λ–показником Гурвіца для рішення $x_i \in X$.

При *λ=1* $G^{+}(x_i;\lambda)=\min\limits_{\theta_j\in\Theta} f_{ij}^{+}$, тобто критерій Гурвіца збігається з критерієм Вальда, а при *λ=0* $G^{+}(x_i;\lambda)=\max\limits_{\theta_j\in\Theta} f_{ij}^{+}$, тобто критерій Гурвіца збігається з максимаксним критерієм. У першому випадку (*λ=1*) вважається, що середовище максимально протидіє цілям суб'єкта управління, в другому (*λ=0*), навпаки, середовище найкращим чином допомагає цілям управління.

У випадку, коли $F=F^{-}$, оптимальним є рішення:

$$x_i^{*}=G^{-}(x_i^{*};\lambda)=\min_{x_i\in X} G^{-}(x_i;\lambda), \tag{5.21}$$

де $G^{-}(x_i;\lambda)=(1-\lambda)\min\limits_{\theta_j\in\Theta} f_{ij}^{-}+\lambda\max\limits_{\theta_j\in\Theta} f_{ij}^{-};\qquad \lambda\in[0;1].$

Параметр λ можна інтерпретувати як коефіцієнт несхильності до ризику.

б) модифіковані критерії.

Згідно з модифікованими критеріями у випадку, коли $F=F^{+}$, оптимальним є рішення:

$$x_i^{*}=\Phi^{+}(x_i^{*};P;\lambda)=\max_{x_i\in X}\Phi^{+}(x_i;P;\lambda), \tag{5.22}$$

або ж у випадку, коли $F=F^{-}$, оптимальним є рішення:

$$x_i^{*}=\Phi^{-}(x_i^{*};P;\lambda)=\min_{x_i\in X}\Phi^{-}(x_i;P;\lambda), \tag{5.23}$$

де $\Phi^{\pm}(x_i;P;\lambda)=(1-\lambda)B^{\pm}(x_i;P)+\lambda R^{-}(x_i;P);\quad \lambda\in[0;1],$ а в якості величини $R^{-}(x_i;P)$ можна використати або середньоквадратичне відхилення $\sigma^{-}(x_i;P)$ або будь-який інший співрозмірний з $B^{\pm}(x_i;P)$ вимірювач ризику. Параметр $\lambda\in[0;1]$, який використовується у зазначених вище критеріях, можна трактувати як коефіцієнт несхильності до ризику.

в) критерій Ходжеса-Лемана.

Критерій Ходжеса-Лемана дає змогу використовувати всю інформацію, що її має суб'єкт управління, але в той же час забезпечує заданий рівень гарантії у випадку, коли ця інформація неточна. У деякому плані критерій Ходжеса-Лемана являє собою поєднання критеріїв Байєса та Вальда.

Згідно з критерієм Ходжеса-Лемана у випадку, коли $F = F^{+}$, оптимальним є рішення:

$$x_i^* = HL^+(x_i^*; P; \lambda) = \max_{x_i \in X} HL^+(x_i; P; \lambda), \tag{5.24}$$

де $HL^+(x_i; P; \lambda) = (1-\lambda)B^+(x_i; P) + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^+$,

якщо ж $F = F^-$, то оптимальним є рішення:

$$x_i^* = HL^-(x_i^*; P; \lambda) = \min_{x_i \in X} HL^-(x_i; P; \lambda), \tag{5.25}$$

де $HL^-(x_i; P; \lambda) = (1-\lambda)B^-(x_i; P) + \lambda \max_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^-$.

Як і раніше, параметр $\lambda \in [0;1]$, і його можна інтерпретувати як коефіцієнт несхильності до ризику.

Критерій Парето.

Згідно з Парето рішення x_i вважається не гіршим від рішення x_k (позначається $x_i \succcurlyeq x_k$; $x_i, x_k \in X$), якщо для всіх елементів відповідних їм векторів F_i та F_k мають місце оцінки $f_{ij}^+ \geq f_{kj}^+$, якщо $F = F^+$, чи $f_{ij}^- \leq f_{kj}^-$, якщо $F = F^-$.

Якщо хоча б для однієї компоненти f_{is}, $1 \leq s \leq n$ вектора F_i має місце строга нерівність $f_{is}^+ > f_{ks}^+$ (для $F = F^+$) чи $f_{is}^- < f_{ks}^-$ (для $F = F^-$), то рішення x_i вважається кращим за рішення x_k (записується $x_i \succ x_k$).

Рішення $x_i^* \in X$ є оптимальним за Парето, якщо в множині X не знайдеться рішення, краще від x_i^*.

Рішення $x_k \in X$ називається покращуваним, якщо існує рішення $x_i \in X$ таке, що $x_i \succ x_k$.

На практиці ситуація, коли рішення, що приймається, буде оптимальним за Парето, є досить рідкісним явищем. У разі відсутності рішення, оптимального за Парето, утворюють множину непокращуваних за Парето рішень $X_П \in X$. Тоді оптимальне рішення доцільно шукати у множині Парето $X_П$, використовуючи при цьому критерії, адекватні ситуації прийняття рішень.

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 5.1.

Будівельна компанія «Оселя» розглядає будівництво таких альтернативних проектів: елітний будинок в центрі міста x_1, елітний будинок в спальному районі міста з прибудинковою інфраструктурою (гаражі, дитячий майданчик, паркінг) x_2, два будинки економ-класу в спальному районі міста x_3, два будинки економ-класу у передмісті x_4, котеджне містечко у передмісті x_5.

Прибутковість кожного з проектів залежить від різних чинників: попиту на елітне житло та житло економ-класу, стану платоспроможності населення, іпотечної політики комерційних банків та НБУ, зміни чинного законодавства щодо оподаткування нерухомості. Експертами-аналітиками виділено 4 стани економічного середовища θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, кожен з яких означає певне поєднання чинників, що впливають на прибутковість проектів будівництва.

Прибутковість (млн грн) кожного з проектів залежно від станів економічного середовища задана наступним функціоналом оцінювання, який наведено у таблиці 5.3.

Необхідно прийняти рішення про вибір будівництва одного з проектів на основі критерію Байєса, якщо відомий розподіл ймовірностей настання станів економічного середовища:

$p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}1;\ p_3 = 0{,}4;\ p_4 = 0{,}2.$

Таблиця 5.3

Проекти будівництва	***Стани економічного середовища***			
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
Елітний будинок в центрі міста	15	19	17	10
Елітний будинок в спальному районі міста з прибудинковою інфраструктурою	18	12	14	14
Два будинки економ-класу в спальному районі міста	10	12	16	18
Два будинки економ-класу у передмісті	14	10	20	10
Котеджне містечко у передмісті	16	20	12	16

Розв'язання.

Правило вибору рішення за критерієм Байєса представлене формулою (5.7), так як даний функціонал оцінювання має додатній інгредієнт, бо характеризує прибутковість проектів будівництва.

Для кожного рішення x_i ($i = \overline{1,5}$) знаходимо величини $B^+(x_i;P)$ як математичне сподівання всіх можливих значень даного проекту при кожному стані економічного середовища:

$$B_1^+ = B^+(x_1;P) = M(F_1^+) = 0{,}3 \cdot 15 + 0{,}1 \cdot 19 + 0{,}4 \cdot 17 + 0{,}2 \cdot 10 = 15{,}2;$$
$$B_2^+ = B^+(x_2;P) = M(F_2^+) = 0{,}3 \cdot 18 + 0{,}1 \cdot 12 + 0{,}4 \cdot 14 + 0{,}2 \cdot 14 = 15{,}0;$$
$$B_3^+ = B^+(x_3;P) = M(F_3^+) = 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 12 + 0{,}4 \cdot 16 + 0{,}2 \cdot 18 = 14{,}2;$$
$$B_4^+ = B^+(x_4;P) = M(F_4^+) = 0{,}3 \cdot 14 + 0{,}1 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 10 = 15{,}2;$$
$$B_5^+ = B^+(x_5;P) = M(F_5^+) = 0{,}3 \cdot 16 + 0{,}1 \cdot 20 + 0{,}4 \cdot 12 + 0{,}2 \cdot 16 = 14{,}8.$$

А оптимальне рішення x_i^* за критерієм Байєса віднайдемо як максимальне значення серед знайдених $B^+(x_i;P)$:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X} B_i^+ = \max_{x_i \in X}\{15{,}2;\ 15{,}0;\ 14{,}2;\ 15{,}2;\ 14{,}8\} = 15{,}2 = B_1^+ = B_4^+.$$

Отже, за критерієм Байєса оптимальними є проекти x_1^* та x_4^* (вони є еквівалентними рішеннями), тобто будівельній компанії слід реалізовувати перший (елітний будинок в центрі міста) або четвертий (два будинки економ-класу у передмісті) проекти.

Відповідь: будівельній компанії «Оселя» доцільно будувати елітний будинок в центрі міста або два будинки економ-класу у передмісті. Для прийняття остаточного рішення доцільно застосувати інші критерії прийняття рішень.

Приклад 5.2.

Користуючись умовою прикладу *5.1*, необхідно прийняти рішення про вибір будівництва одного з проектів на основі модального критерію.

Розв'язання.

Правило вибору рішення за модальним критерієм сформульоване у формулі (5.9), так як даний функціонал оцінювання має додатній інгредієнт, бо характеризує прибутковість проектів будівництва.

З максимальною ймовірністю може настати випадкова подія θ_3, оскільки їй відповідає мода випадкової величини $M_0(\theta)$, яку обчислено з наступного співвідношення:

$$M_0(\Theta) = \max_j p_j = \max\{0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}2\} = 0{,}4 = p_3.$$

Отже, моді відповідає третій стан економічного середовища θ_3.

Тепер знайдемо оптимальне рішення як максимальне серед всіх можливих рішень, що реалізуються при настанні третього стану економічного середовища:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X}\{ f^+(x_1;\theta_3);\ f^+(x_2;\theta_3);\ f^+(x_3;\theta_3);\ f^+(x_4;\theta_3);\ f^+(x_5;\theta_3)\} =$$

$$= \max\{17;14;16;20;12\} = 20.$$

$$x_4^* = 20.$$

Отже, за модальним критерієм для будівельної компанії є оптимальним четверте рішення, тобто проект: будівництво двох будинків економ-класу у передмісті.

Відповідь: будівельній компанії «Оселя» доцільно будувати два будинки економ-класу у передмісті. Для прийняття остаточного рішення доцільно застосувати інші критерії прийняття рішень.

Задача 5.4.

Користуючись умовою прикладу 5.1, необхідно прийняти рішення про вибір будівництва одного з проектів на основі критерію Бернуллі-Лапласа.

Розв'язання.

Правило вибору за критерієм Бернуллі-Лапласа представлене формулою (5.13), так як даний функціонал оцінювання має додатній інгредієнт, бо характеризує прибутковість проектів будівництва. Даний критерій можна застосовувати тоді, коли немає жодних відомостей про умови, за яких кожен стан економічного середовища може відбутися, а можливі стани розглядаються як рівно ймовірні.

Оскільки є чотири стани економічного середовища, то ймовірності настання кожного стану $p_j = 1/4 \quad (j = \overline{1,4})$, тобто

$$\hat{p} = \left\{\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right\}.$$

Для кожного рішення x_i знайдемо відповідні значення $B^{+}(x_i;\hat{p})$:

$$B_1^{+}=B^{+}(x_1;\hat{p})=\frac{1}{4}(15+19+17+10)=15{,}25;$$

$$B_2^{+}=B^{+}(x_2;\hat{p})=\frac{1}{4}(18+12+14+14)=14{,}5;$$

$$B_3^{+}=B^{+}(x_3;\hat{p})=\frac{1}{4}(10+12+16+18)=14{,}0;$$

$$B_4^{+}=B^{+}(x_4;\hat{p})=\frac{1}{4}(14+10+20+10)=13{,}5;$$

$$B_5^{+}=B^{+}(x_5;\hat{p})=\frac{1}{4}(16+20+12+16)=16{,}0.$$

А оптимальне рішення x_i^{*} за критерієм Бернуллі-Лапласа віднайдемо як максимальне значення серед знайдених $B^{+}(x_i;\hat{p})$:

$$x_i^{*}=\max_{x_i\in X}B_i^{+}=\max\{15{,}25;\,14{,}5;\,14{,}0;\,13{,}5;\,16{,}0\}=16=B_5^{+}.$$

Отже, за критерієм Бернуллі-Лапласа будівельній компанії слід обрати рішення x_5^{*}, тобто проект: будівництво котеджного містечка у передмісті.

Відповідь: будівельній компанії «Оселя» доцільно будувати котеджне містечко у передмісті. Для прийняття остаточного рішення доцільно застосувати інші критерії прийняття рішень.

Приклад 5.5.

Користуючись умовою прикладу 5.1, необхідно прийняти рішення про вибір будівництва одного з проектів на основі критерію Вальда.

Розв'язання.

Правило вибору рішення за критерієм Вальда сформульоване у формулі (5.15), так як даний функціонал оцінювання має додатній інгредієнт, бо характеризує прибутковість проектів будівництва.

Спочатку знаходимо величини гарантованого рівня $\min\limits_{\theta_j\in\Theta} f_{ij}^{+}$ для кожного рішення x_i як мінімальне значення даного рішення за всіма станами економічного середовища:

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{1j}^+ = \min\limits_{\theta_j \in \Theta}\{15;19;17;10\} = 10$;

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{2j}^+ = \min\limits_{\theta_j \in \Theta}\{18;12;14;14\} = 12$;

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{3j}^+ = \min\limits_{\theta_j \in \Theta}\{10;12;16;18\} = 10$;

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{4j}^+ = \min\limits_{\theta_j \in \Theta}\{14;10;20;10\} = 10$;

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{5j}^+ = \min\limits_{\theta_j \in \Theta}\{16;20;12;16\} = 12$.

Далі серед знайдених гарантованих рівнів $\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^+$ знаходимо найбільше його значення, яке і буде оптимальним рішенням за критерієм Вальда:

$x_i^* = \max\limits_{x_i \in X}\{10;12;10;10;12\} = 12 = x_2^* = x_5^*$ – це гарантований рівень прибутку для будівельної компанії і він досягається при виборі ним другого або п’ятого рішення (будівельній компанії слід реалізовувати другий (елітний будинок в спальному районі міста з прибудинковою інфраструктурою) або п’ятий (котеджне містечко у передмісті) проекти).

Відповідь: будівельній компанії «Оселя» доцільно будувати елітний будинок в спальному районі міста з прибудинковою інфраструктурою або котеджне містечко у передмісті. Для прийняття остаточного рішення доцільно застосувати інші критерії прийняття рішень.

Приклад 5.6.

Користуючись умовою прикладу 5.2, необхідно прийняти рішення про вибір будівництва одного з проектів на основі критерію Гурвіца, якщо параметр $\lambda = 0{,}8$.

Розв’язання.

Правило вибору рішення за критерієм Гурвіца сформульоване у формулі (5.20), так як даний функціонал оцінювання має додатній інгредієнт, бо характеризує прибутковість проектів будівництва.

Спочатку знаходимо величини $\max\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^+$ для кожного рішення x_i як максимальне значення даного рішення за всіма станами економічного середовища:

$$\max_{\theta_j \in \Theta} f_{1j}^+ = \max_{\theta_j \in \Theta}\{15;19;17;10\} = 19;$$
$$\max_{\theta_j \in \Theta} f_{2j}^+ = \max_{\theta_j \in \Theta}\{18;12;14;14\} = 18;$$
$$\max_{\theta_j \in \Theta} f_{3j}^+ = \max_{\theta_j \in \Theta}\{10;12;16;18\} = 18;$$
$$\max_{\theta_j \in \Theta} f_{4j}^+ = \max_{\theta_j \in \Theta}\{14;10;20;10\} = 20;$$
$$\max_{\theta_j \in \Theta} f_{5j}^+ = \max_{\theta_j \in \Theta}\{16;20;12;16\} = 20.$$

Розрахунок значень величин $\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^+$ для кожного рішення x_i наведено у прикладі *5.5*.

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{1j}^+ = 10$; $\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{2j}^+ = 12$; $\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{3j}^+ = 10$; $\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{4j}^+ = 10$;

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{5j}^+ = 12.$

Для кожного рішення x_i знайдемо відповідні значення $G^+(x_i;\lambda)$:

$$G^+(x_1;\lambda) = (1-\lambda)\max_{\theta_j \in \Theta} f_{1j}^+ + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{1j}^+ = (1-0{,}8)\cdot 19 + 0{,}8\cdot 10 = 11{,}8;$$
$$G^+(x_2;\lambda) = (1-\lambda)\max_{\theta_j \in \Theta} f_{2j}^+ + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{2j}^+ = (1-0{,}8)\cdot 18 + 0{,}8\cdot 12 = 13{,}2;$$
$$G^+(x_3;\lambda) = (1-\lambda)\max_{\theta_j \in \Theta} f_{3j}^+ + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{3j}^+ = (1-0{,}8)\cdot 18 + 0{,}8\cdot 10 = 11{,}6;$$
$$G^+(x_4;\lambda) = (1-\lambda)\max_{\theta_j \in \Theta} f_{4j}^+ + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{4j}^+ = (1-0{,}8)\cdot 20 + 0{,}8\cdot 10 = 12{,}0;$$
$$G^+(x_5;\lambda) = (1-\lambda)\max_{\theta_j \in \Theta} f_{5j}^+ + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{5j}^+ = (1-0{,}8)\cdot 20 + 0{,}8\cdot 12 = 13{,}6.$$

Далі серед знайдених величин $G^+(x_i;\lambda)$ знаходимо найбільше його значення, яке і буде оптимальним рішенням за критерієм Гурвіца:

$$x_i^* = \max_{x_i \in X} G^+(x_i;\lambda) = \max\{11{,}8;13{,}2;11{,}6;12{,}0;13{,}6\} = 13{,}6 = G^+(x_5^*;\lambda).$$

Отже, за критерієм Гурвіца будівельній компанії слід обрати рішення x_5^*, тобто проект: будівництво котеджного містечка у передмісті.

Відповідь: будівельній компанії «Оселя» доцільно будувати котеджне містечко у передмісті. Для прийняття остаточного рішення доцільно застосувати інші критерії прийняття рішень.

Приклад 5.7.

Користуючись умовою прикладу 5.1, необхідно прийняти рішення про вибір будівництва одного з проектів на основі критерію Ходжеса-Лемана, якщо параметр $\lambda = 0{,}6$, і якщо відомо, що стани економічного середовища можуть реалізуватись, відповідно, з ймовірностями:

$$p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}1;\ p_3 = 0{,}4;\ p_4 = 0{,}2.$$

Розв'язання.

Правило вибору рішення за критерієм Ходжеса-Лемана представлене формулою (5.24), так як даний функціонал оцінювання має додатній інгредієнт, бо характеризує прибутковість проектів будівництва.

Розрахунок значень величин $B^{+}(x_i;P)$ для кожного рішення x_i наведено у прикладі *5.2*.

$$B^{+}(x_1;P) = 15{,}2;\quad B^{+}(x_2;P) = 15{,}0;\quad B^{+}(x_3;P) = 14{,}2;$$
$$B^{+}(x_4;P) = 15{,}2;\quad B^{+}(x_5;P) = 14{,}8.$$

Розрахунок значень величин $\min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{ij}^{+}$ для кожного рішення x_i наведено у прикладі *5.5*.

$$\min_{\theta_j \in \Theta} f_{1j}^{+} = 10;\quad \min_{\theta_j \in \Theta} f_{2j}^{+} = 12;\quad \min_{\theta_j \in \Theta} f_{3j}^{+} = 10;$$
$$\min_{\theta_j \in \Theta} f_{4j}^{+} = 10;\quad \min_{\theta_j \in \Theta} f_{5j}^{+} = 12.$$

Для кожного рішення x_i знайдемо відповідні значення $HL^{+}(x_i;P;\lambda)$:

$$HL^{+}(x_1;P;\lambda)=(1-\lambda)B^{+}(x_1;P)+\lambda\min_{\theta_j\in\Theta} f_{1j}^{+}=$$
$$=(1-0{,}6)\cdot 15{,}2+0{,}6\cdot 10=12{,}08;$$
$$HL^{+}(x_2;P;\lambda)=(1-\lambda)B^{+}(x_2;P)+\lambda\min_{\theta_j\in\Theta} f_{2j}^{+}=$$
$$=(1-0{,}6)\cdot 15{,}0+0{,}6\cdot 12=13{,}20;$$
$$HL^{+}(x_3;P;\lambda)=(1-\lambda)B^{+}(x_3;P)+\lambda\min_{\theta_j\in\Theta} f_{3j}^{+}=$$
$$=(1-0{,}6)\cdot 14{,}2+0{,}6\cdot 10=11{,}68;$$
$$HL^{+}(x_4;P;\lambda)=(1-\lambda)B^{+}(x_4;P)+\lambda\min_{\theta_j\in\Theta} f_{4j}^{+}=$$
$$=(1-0{,}6)\cdot 15{,}2+0{,}6\cdot 10=12{,}08;$$
$$HL^{+}(x_5;P;\lambda)=(1-\lambda)B^{+}(x_5;P)+\lambda\min_{\theta_j\in\Theta} f_{5j}^{+}=$$
$$=(1-0{,}6)\cdot 14{,}8+0{,}6\cdot 12=13{,}12.$$

Далі серед знайдених величин $HL^{+}(x_i;P;\lambda)$ знаходимо найбільше його значення, яке і буде оптимальним рішенням за критерієм Ходжеса-Лемана:

$$x_i^{*}=\max_{x_i\in X} HL^{+}(x_i;P;\lambda)=\max_{x_i\in X}\{12{,}08;\ 13{,}20;\ 11{,}68;\ 12{,}08;\ 13{,}12\}=$$
$$=13{,}20=HL^{+}(x_2^{*};P;\lambda).$$

Отже, за критерієм Ходжеса-Лемана будівельній компанії слід обрати рішення x_2^{*}, тобто проект: будівництво елітного будинку в спальному районі міста з прибудинковою інфраструктурою.

Відповідь: будівельній компанії «Оселя» доцільно будувати елітний будинок в спальному районі міста з прибудинковою інфраструктурою. Для прийняття остаточного рішення доцільно застосувати інші критерії прийняття рішень.

Задачі для самостійного опрацювання

Завдання 5.1.

В процесі стратегічного планування менеджери підприємства “Стар” розробили п’ять стратегічних альтернатив розвитку підприємства: $x_1, x_2, ..., x_5$. Кожній з альтернатив відповідає певний рівень витрат та доходів. Успішність реалізації кожної із стратегічних альтернатив залежить від стану економічного середовища (доходи і вподобання споживачів, дії конкурентів, політика держави). Менеджери вважають, що стан середовища може бути трьох варіантів: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Для оцінки стратегічних альтернатив було проведено аналіз їх прибутковості за різних варіантів станів економічного середовища. Результати оцінки подано в табл. 5.6.

Таблиця 5.6.

Стратегічні альтернативи	***Варіанти станів середовища***		
	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	75	35+N	15
x_2	10+2·N	35	20
x_3	30+N	25	80+N
x_4	25	40+N	35
x_5	85	40	15+N

Побудувати матрицю ризиків для стратегічних альтернатив підприємства “Стар”.

Завдання 5.2.

Підприємство “Фітко” готується до переходу на нові види продукції, при цьому можливі такі чотири варіанти рішення x_1, x_2, x_3, x_4, кожному з яких відповідає певний випуск видів продукції чи їх комбінація.

Результат прийняття рішення суттєво залежить від зовнішньої ситуації, яка в певній мірі невизначена. Варіанти ситуації характеризує структура попиту на нову продукцію, яка може бути п'яти типів: d_1, d_2, d_3, d_4, d_5.

Виграш, який характеризує відносну величину результату (прибуток, тис. грн), що відповідає кожній парі поєднання рішення x та ситуації d, представлено в табл. 5.7.

Таблиця 5.7.

Варіант рішення	***Зовнішня ситуація***				
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
x_1	75	43	63+*N*/3	73	67
x_2	59	64+*N*/4	51	78	45
x_3	73	57	57	86–*N*/2	72
x_4	81–*N*/2	66	43+*N*	37	35+2·*N*

Відомо, що зовнішня ситуація може реалізуватись, відповідно, з ймовірностями:

а) якщо $T = 0$, де T – остача від ділення $[N/3]$:

$p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}1;\ p_3 = 0{,}3;\ p_4 = 0{,}1;\ p_5 = 0{,}3;$

б) якщо $T = 1$, де T – остача від ділення $[N/3]$:

$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}2;\ p_4 = 0{,}2;\ p_5 = 0{,}3;$

в) якщо $T = 2$, де T – остача від ділення $[N/3]$:

$p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}1;\ p_3 = 0{,}4;\ p_4 = 0{,}1;\ p_5 = 0{,}2.$

Потрібно побудувати матрицю ризиків для даного функціоналу оцінювання та знайти таку стратегію підприємства "Фітко", яка б порівняно з іншими була найбільш вигідною за критерієм:

1) Байєса;

2) мінімальної дисперсії;

3) Севіджа.

Завдання 5.3.

Користуючись функціоналом оцінювання, який подано у таблиці 5.8, необхідно вибрати оптимальне рішення:

а) на основі критерію Вальда;

б) на основі критерію Бернуллі-Лапласа;

в) на основі модального критерію.

Таблиця 5.8.

Рішення	***Стани економічного середовища***							
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
1	62+*N*	80	98	33	19	51	22	98
2	73	99	80+*N*	92–*N*	79	55	33	11
3	56+2·*N*	63	16	99+2·*N*	14	87	64+*N*	57
4	45	91+*N*	45	76	69	95	46	79
5	37	49+2·*N*	79	17+3·*N*	27	62+*N*	97	89
6	50	54	91–*N*	40	14	56	24+3·*N*	15
7	75+*N*	18	67	84+*N*	83	37	69	75
8	29	60	42	100	98	81	52	14+*N*
9	68	16	76	28	81	30	31	26
10	17+3·*N*	86	90	17	79+2·*N*	64	21	39
11	17+3·*N*	19	17+3·*N*	69	57	96–*N*	78	19+2·*N*
12	84	80+*N*	71	36+*N*	56	62	60	38
13	82+*N*	74	63+2·*N*	61	86	19+*N*	83	63
14	71	94	24	28	83	89–*N*	87	51
15	20	35+2·*N*	87	72+3·*N*	67	79	33	58+*N*

Стани економічного середовища можуть реалізуватись, відповідно, з ймовірностями:

$$p_1 = 0{,}15;\ p_2 = 0{,}1;\ p_3 = 0{,}05;\ p_4 = 0{,}1;$$

$$p_5 = 0{,}05;\ p_6 = 0{,}2;\ p_7 = 0{,}15;\ p_8 = 0{,}2.$$

Розглянути випадок позитивного інгредієнта функціоналу оцінювання F^+ та випадок негативного інгредієнта функціоналу оцінювання F^-.

Завдання 5.4.

Консалтингова група "Перфект" проводить порівняння різних інвестиційних проектів Π_1, Π_2, …, Π_{10}. Для реалізації кожного з проектів необхідна певна величина капітальних вкладень K_1, K_2, …, K_{10}. Величини капітальних вкладень є контрольованими чинниками – можливе управління ними.

Кожному проекту відповідає певне прогнозне значення собівартості продукції, яку планують випускати при реалізації проекту, C_1, C_2, …, C_{10}. Величини собівартості продукції на початкових стадіях реалізації проекту точно визначити неможливо, тому їх вважають неконтрольованими чинниками.

Кожній парі $(K_i,\ C_j)$ відповідає певне значення приведених річних витрат, які визначаються за формулою:

$$Z_{ij} = E_н \cdot K_i + C_j,$$

де $E_н$ – нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладень, $E_н = 0{,}8 + 0{,}05 \cdot N$.

Величини капітальних вкладень та собівартості продукції для кожного проекту наведені у таблиці 5.9.

Таблиця 5.9.

Номер інвестиційного проекту	***Величина капітальних вкладень, тис. грн***	***Стани економічного середовища***	***Собівартість продукції, грн***
1.	100+7·*N*	***1.***	500
2.	200	***2.***	460+5·*N*
3.	150+5,5·*N*	***3.***	650
4.	250	***4.***	520+2·*N*
5.	300	***5.***	700
6.	300–3·*N*	***6.***	750–8·*N*
7.	220+2·*N*	***7.***	540+3·*N*
8.	180+4·*N*	***8.***	600
9.	350–4·*N*	***9.***	620+2,5·*N*
10.	270+2·*N*	***10.***	580+4·*N*

Скласти матрицю приведених затрат та знайти найбільш ефективну стратегію за:

1) критерієм Гурвіца,

2) критерієм Ходжеса-Лемана, якщо ймовірності станів економічного середовища набувають наступних значень:

$$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}125;\ p_3 = 0{,}075;\ p_4 = 0{,}05;\ p_5 = 0{,}15;$$

$$p_6 = 0{,}05;\ p_7 = 0{,}15;\ p_8 = 0{,}1;\ p_9 = 0{,}15;\ p_{10} = 0{,}05.$$

Причому параметр λ для обох критеріїв прийняти однаковим у розмірі $\lambda = 0{,}5$.

Завдання 5.5.

Підприємство “Юпітер” розглядає чотири інвестиційні проекти $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. Відомо, що економічне середовище може перебувати в одному з трьох станів $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. В результаті експертної оцінки відомий функціонал оцінювання F^{+}, що характеризує прибуток (у млн грн), і який наведений у таблиці 5.10,

Таблиця 5.10.

Інвестиційні проекти	***Стани економічного середовища***		
	$\boldsymbol{\theta_1}$	$\boldsymbol{\theta_2}$	$\boldsymbol{\theta_3}$
$\boldsymbol{x_1}$	10	3	5
$\boldsymbol{x_2}$	12	6	3
$\boldsymbol{x_3}$	7	10	4
$\boldsymbol{x_4}$	5	9	8

та апріорні імовірності на станах середовища Θ:

$$p(\theta_1) = \frac{1}{6}, \quad p(\theta_2) = \frac{1}{2}, \quad p(\theta_3) = \frac{1}{3}.$$

Знайти, який інвестиційний проект порівняно з іншим найбільш вигідний, якщо суб'єкт керування вважає, що оптимальне рішення треба приймати за:

а) якщо $T = 0$, де T – остача від ділення $[N/3]$:

1) критерієм Гурвіца,

2) критерієм Ходжеса-Лемана,

причому параметр λ для обох критеріїв прийняти однаковим у розмірі $\lambda = 0{,}5$.

б) якщо $T = 1$, де T – остача від ділення $[N/3]$:

1) критерієм Гурвіца,

2) критерієм Ходжеса-Лемана,

причому параметр λ для критерію Гурвіца рівний $\lambda = 0{,}1$, а для критерію Ходжеса-Лемана – $\lambda = 0{,}9$.

в) якщо $T = 2$, де T – остача від ділення $[N/3]$:

1) критерієм Гурвіца,

2) критерієм Ходжеса-Лемана,

причому параметр λ для критерію Гурвіца рівний $\lambda = 0{,}9$, а для критерію Ходжеса-Лемана – $\lambda = 0{,}1$.

Завдання 5.6.

На підприємстві "Спектр" використання сировини на одиницю продукції в залежності від виду продукції складає 1–5 літрів. Якщо для випуску продукції сировини буде недостатньо, то запас її можна поповнити при затратах $20+0,5\cdot N$ грн за 1 літр сировини, якщо ж запас сировини перевищує потреби, то затрати на зберігання залишків складають $10+0,5\cdot N$ грн за 1 літр сировини.

1. Скласти функціонал оцінювання використання сировини.
2. Побудувати матрицю ризиків.
3. Знайти оптимальну стратегію використання сировини на основі критерію домінуючого результату.
4. Знайти оптимальну стратегію використання сировини на основі критерію Севіджа.

У пунктах 1–4 розглянути випадок позитивного інгредієнта функціоналу оцінювання F^{+} та випадок негативного інгредієнта функціоналу оцінювання F^{-}.

Питання для контролю

1. Дайте визначення поняттю ”функціонал оцінювання”.
2. Що таке функція ризику?
3. Що таке матриця невикористаних можливостей?
4. Назвіть класи інформаційних ситуацій. Дайте характеристику кожній інформаційній ситуації.
5. Що таке критерії прийняття рішень?
6. Які критерії прийняття рішень використовуються в полі 1-ої інформаційної ситуації?
7. Які критерії прийняття рішень використовуються в полі 2-ої інформаційної ситуації?
8. Які критерії прийняття рішень використовуються в полі 3-ої інформаційної ситуації?
9. Які критерії прийняття рішень використовуються в полі 4-ої інформаційної ситуації?
10. Які критерії прийняття рішень використовуються в полі 5-ої інформаційної ситуації?
11. Які критерії прийняття рішень використовуються в полі 6-ої інформаційної ситуації?
12. В полі якої інформаційної ситуації застосовують критерій Бернулі-Лапласа? Чому?

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Артим-Дрогомирецька З.Б. Економічний ризик: навч.-метод. посібник / З. Б. Артим-Дрогомирецька, М. В. Негрей / Львів: Магнолія-2006, 2013. – 320 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., стереотип.] / Е.С. Вентцель – М.: Дрофа, 2004. – 208 с.
3. Вітлінський В.В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
4. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику / В.В. Вітлінський – К.: Деміур, 1996. – 212 с.
5. Вітлінський В.В. Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, О.Д. Шарапов – К.: ІЗМН, 1996. – 400 с.
6. Вітлінський В.В. Ризик у менеджменті / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний – К.: ТОВ ”Борисфен-М”, 1996. – 336 с.
7. Вітлінський В.В. Ризикологія в економіці та підприємництві: Монографія / В.В. Вітлінський, Г.І. Великоіваненко – К.: КНЕУ, 2004. – 480 с.
8. Вовк В.М. Інвестиції та їхні оптимізаційні моделі / В.М. Вовк, І.М. Паславська – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – 286 с.
9. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях / М.Г. Гафт – М.: Знание, 1979. – 64 с.
10. Грабовый П.Г. Риски в современном бизнесе / П.Г. Грабовый, С.Н. Петрова, С.И. Полтавцев – М.: Аланс, 1994. – 240 с.
11. Донець Л.І. Економічні ризики і методи їх вимірювання: Навчальний посібник / Л.І. Донець – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 312 с.
12. Економічний ризик: ігрові моделі: [Навч. пос.] / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко, А.В. Сігал, Я.С. Наконечний; за ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.
13. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. / Ю.М. Ермольев – М.: Наука, 1976. – 239 с.
14. Івченко І.Ю. Економічні ризики: Навчальний посібник [мультимедійний підручник] / І.Ю. Івченко – Київ: «Центр навчальної літератури», 2004. – 304 с.

15. Ілляшенко С.М. Економічний ризик: Навчальний посібник. 2-ге вид., доп. перероб. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 220 с.
16. Камінський А.Б. Моделювання фінансових ризиків: Монографія / А.Б. Камінський – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
17. Катренко А.В. Дослідження операцій: Підручник / За наук. ред. В.В. Пасічника. 2-е видання, виправлене та доповнене. – Львів: “Магнолія 2006”, 2007. – 480 с.
18. Клименюк М.М. Управління ризиками в економіці: [навч.посіб.] / М. М. Клименюк, І. А. Брижань. – К.: Просвіта, 2000. – 256 с.
19. Матвійчук А.В. Економічні ризики в інвестиційній діяльності. Монографія / А.В. Матвійчук – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 205 с.
20. Машина Н.І. Економічний ризик і методи його вимірювання: Навч. посіб. / Н.І. Машина – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188 с.
21. Мирзоахмедов Ф. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов [Текст]: монография / Ф.Мирзоахмедов. – Киев: Наукова думка, 1991. – 219 с.
22. Первозванский А.А. Финансовый рынок: расчет и риск / А.А. Первозванский, Т.Н. Первозванская – М.: Инфра, 1994. –192 с.
23. Райс Т. Финансовые инвестиции и риск [пер. с англ.] / Т. Райс, Б. Койли – К.: Торг.-изд. бюро BHV, 1995. – 592 с.
24. Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику / О.І. Ястремський – К.: Либідь, 1992 – 176 с.
25. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику: Навч. посібник / О.І. Ястремський – К.: ”АртЕк”, 1997. – 248 с.

ТЕМА 6

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КОРИСНОСТІ ДО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

Для задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику принцип оптимальності (оптимального вибору) часто описується за допомогою функцій корисності.

Корисність – властивість речовини, матерії, інформації, довкілля, товару, послуги задовольняти потреби людини. Корисність виражає ступінь задоволення, яке одержує суб'єкт від споживання товару чи виконання будь-якої дії.

Якщо товар, послуга тощо підвищують добробут людини, то вони мають *позитивну корисність*, або вони є благами. Якщо вони шкодять людині, то це – антиблага, або мають *від'ємну корисність*. Для людини, схильної до ризику, ризик – це благо, а для несхильної до ризику – антиблаго. Одиниці виміру корисності – утиль.

У теорії корисності широке застосування має таке поняття як пріоритет. Позначимо співвідношення:

„пріоритетніше, ніж" символом $\succ$;

„байдуже" – $\approx$;

„не гірше ніж" – $\succcurlyeq$.

Нестроге співвідношення пріоритетності „не гірше ніж" записують: $x \succcurlyeq y$, де x, y – набори товарів чи послуг, $x \in X$, $y \in Y$.

Воно означає, що певний споживач вважає для себе набір x або пріоритетнішим ніж набір y, або не робить між ними різниці, тобто x не гірше за y.

Поняття *байдужості* записують: $x \sim y$, тобто набори товарів чи послуг байдужі або еквівалентні тоді і лише тоді, коли $x \succcurlyeq y$, та $y \succcurlyeq x$.

Поняття *строгої пріоритетності* записують: $x \succ y$, тобто споживач бажає обрати x, а не y, і це відбувається тоді, коли x не гірше за y, а y є гіршим за x. Тобто $x \succ y$ тоді і лише тоді, коли $x \succcurlyeq y$, а $y \succcurlyeq x$ – несправедливе.

Основні припущення теорії корисності ґрунтуються на тому, що розумна людина, знаючи два розподіли випадкових величин, які впливають на капітал, зможе надати перевагу одному з цих розподілів, або мати однакове відношення до обох.

В теорії корисності існують аксіоми щодо досконалої нестрогої впорядкованості та неперервності. На базі цього доведене існування неперервної функції $U(x)$, визначеної на елементах множини X, яку називають *функцією корисності* і для якої $U(x) > U(y)$, якщо $x \succ y$.

Існує також поняття *граничної корисності*, яка вимірює додаткове задоволення, яке одержує особа від споживання додаткової кількості товарів чи послуг.

Відомий *закон спадної граничної корисності*: при споживанні кожної наступної одиниці товару його гранична корисність зменшується.

Теорія корисності ґрунтується на припущенні про існування і узгодженості переваг відносно розподілів ймовірностей можливих результатів. Функція корисності не може відображати ніяких випадкових подій. Вона є числовим описом наявних переваг.

Функція корисності не повинна, а насправді і не може, визначатися єдиним способом. Наприклад, якщо

$$U^*(z) = aU(z) + b, \qquad a > 0,$$

то співвідношення

$$M(U(x)) > M(U(y))$$

еквівалентне співвідношенню

$$M(U^*(x)) > M(U^*(y)).$$

Таким чином, переваги зберігаються, якщо функція корисності є лінійним перетворенням вихідної функції з додатними коефіцієнтами.

Нехай функція корисності лінійна і її кут нахилу додатній, тобто $U(z) = aU(z) + b, a > 0$.

Тоді, якщо $M(X) = \mu_X$ і $M(Y) = \mu_Y$, то

$$M(U(x)) = a\mu_X + b > M(U(y)) = a\mu_Y + b$$

в тому і тільки в тому випадку, коли $\mu_X > \mu_Y$. Таким чином, для зростаючої лінійної функції корисності переваги відносно розподілів результатів впорядковані так само, як і математичні сподівання цих розподілів. Отже, якщо функція корисності є лінійною і зростаючою, то принцип очікуваного значення для раціональної економічної поведінки в умовах невизначеності не суперечить правилу очікуваної корисності.

Функція корисності є зростаючою функцією. Крім того, для багатьох ОПР при збільшенні капіталу рівними частинами корисність збільшується зменшеними частинами. Це відображається у законі спадної граничної корисності: при споживанні кожної наступної одиниці товару його гранична корисність зменшується.

Для визначення корисності розглядається вибір особи в умовах ризику, який формалізується за допомогою поняття лотереї. Для цього необхідно з множини пред'явлених експертам значень певного економічного показника $\boldsymbol{X}$ виділити такі два значення $\boldsymbol{x_*}$ та $\boldsymbol{x^*}$ таких, що $\boldsymbol{x \succcurlyeq x_*}$ та $\boldsymbol{x^* \succcurlyeq x}$ для $\forall \boldsymbol{x \in X}$, тобто найменш пріоритетне і найбільш пріоритетне значення показника.

Власне так побудована функція корисності Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна [4, 5, 6, 7]. Експерту пропонується порівняти між собою дві альтернативи:

1. Значення показника $\boldsymbol{x}$.

2. Лотерею, тобто ситуацію, в якій особа може одержати $\boldsymbol{x^*}$ з імовірністю $\boldsymbol{(1-p)}$ чи $\boldsymbol{x_*}$ з імовірністю $\boldsymbol{p}$. Лотерею позначають $\boldsymbol{L(x_*, p, x^*)}$ або $\boldsymbol{L(x_*, p; x^*, q)}$, де $\boldsymbol{p+q=1}$.

За Нейманом корисність варіанта x визначається імовірністю $\boldsymbol{p(x)}$, при якій особі байдуже, що обирати: гарантоване x чи лотерею $\boldsymbol{L(x_*, p(x), x^*)}$.

Нехай $\boldsymbol{L}$ – це лотерея, яка призводить до виграшів (подій): $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$ з відповідними ймовірностями: $\boldsymbol{p_1, p_2, ..., p_n}$.

Розрахуємо сподіваний виграш такої лотереї:

$$\boldsymbol{\bar{x} = M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}\,, \tag{6.1}$$

де $\boldsymbol{\bar{x}}$ – сподіваний виграш лотереї.

Запишемо основну формулу сподіваної корисності:

$$\boldsymbol{\bar{U} = M(U(x)) = U(p_1, x_1; p_2, x_2; ...; p_n, x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot U(x_i)}\,, \tag{6.2}$$

де $\boldsymbol{\bar{U}}$ – значення сподіваної корисності.

При розгляді різних характеристик ризику та їх взаємозв'язку з функціями корисності використовують поняття детермінованого еквівалента лотереї $\boldsymbol{L}$, який позначають $\boldsymbol{\hat{x}}$.

Детермінований еквівалент – це гарантована сума $\boldsymbol{\hat{x}}$, одержання якої еквівалентне участі в лотереї $\boldsymbol{L}$. Детермінований еквівалент $\boldsymbol{\hat{x}}$ визначається з рівняння:

$$U(\hat{x}) = M(U(x)) \text{ або } U(\hat{x}) = \overline{U}(x), \tag{6.3}$$

$$\hat{x} = U^{-1}M(U(x)), \tag{6.4}$$

де U^{-1} – функція, обернена до функції $U(x)$.

Якщо можливі виграші описуються щільністю розподілу $f(x)$, то

$$\overline{x} = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{6.5}$$

а детермінований еквівалент $\hat{x}$ можна знайти з такого співвідношення:

$$M(U(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)f(x)dx \Rightarrow U(\hat{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)f(x)dx. \tag{6.6}$$

Страховою сумою ($CC(X)$) називають величину детермінованого еквівалента, взяту з протилежним знаком:

$$CC(X) = -\hat{x}.$$

Якщо особа, яка приймає рішення, стикається з несприятливою для неї лотереєю (тобто лотереєю менш пріоритетною ніж стан, в якому вона перебуває), то природно запитати, скільки б вона заплатила (в одиницях виміру X) за те, щоб не брати участь у цій лотереї. Для визначення розміру цього платежу вводиться величина, яку називають премією за ризик.

Премія за ризик $\pi(x)$ – це сума, якою суб'єкт прийняття рішення згоден знехтувати з суми середнього (сподіваного) виграшу, щоб уникнути ризику, пов'язаного з лотереєю. Премія за ризик визначається за формулою:

$$\pi(x) = \overline{x} - \hat{x}. \tag{6.7}$$

Вигляд функції корисності може дати інформацію про ставлення особи, що приймає рішення, до ризику.

Особу, яка приймає рішення, називають несхильною до ризику, якщо для неї більш пріоритетним є можливість одержати гарантовано сподіваний виграш у лотереї, аніж брати участь у ній.

Умову несхильності до ризику записують наступним чином:

$$U(M(X)) > M(U(x)) \quad \left(U(\overline{x}) > \overline{U}(x)\right). \tag{6.8}$$

Особа несхильна до ризику тоді і тільки тоді, коли її функція корисності опукла догори. Оскільки функція корисності опукла догори, то особа несхильна до ризику, коли $U''(x) < 0$.

Графічне представлення функції корисності для особи, несхильної до ризику, наведено на рис. 6.1.

Прикладом функції корисності особи несхильної до ризику є:

– логарифмічна функція $U(x) = log(x+b), \ x > -b$;

– експоненційна функція $U(x) = a - b \cdot e^{-cx}, \ b > 0, \ x \geq 0$.

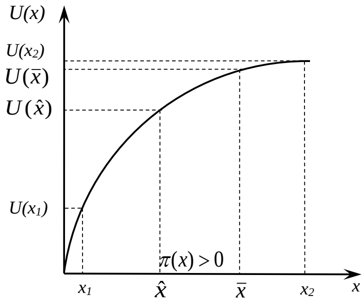


Рис. 6.1. Графік функції корисності особи, несхильної до ризику

Особу, яка приймає рішення, називають схильною до ризику, якщо для неї є більш пріоритетною участь у лотереї, ніж можливість одержати гарантовано сподіваний виграш.

Умова схильності до ризику записується так:

$$U(M(X)) < M(U(x)) \quad \left(U(\bar{x}) < \bar{U}(x)\right). \qquad (6.9)$$

Особа схильна до ризику тоді і тільки тоді, коли її функція корисності опукла донизу. Оскільки функція корисності опукла донизу, то особа схильна до ризику, коли $U''(x) > 0$.

Графічне представлення функції корисності для особи, схильної до ризику, наведено на рис. 6.2.

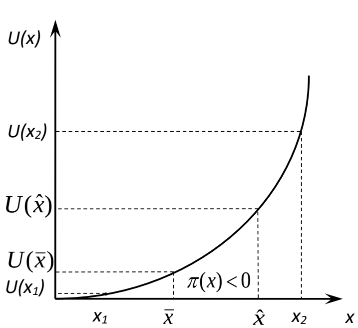


Рис. 6.2. Графік функції корисності особи, схильної до ризику

Прикладом функції корисності особи схильної до ризику може бути степенева функція $\boldsymbol{U(x)=ax^2,\quad x\geq 0}$.

Проміжним значенням між схильністю і несхильністю до ризику є байдужість (нейтральність) до ризику, яка визначається байдужістю особи у виборі між сподіваним виграшем та участю у лотереї. Умову байдужості до ризику записують наступним чином:

$$\boldsymbol{U(M(X))=M(U(x))\quad \left(U(\bar{x})=\bar{U}(x)\right).}\tag{6.10}$$

Функція корисності для особи байдужої до ризику є лінійною, тобто має вигляд

$$\boldsymbol{U(x)=ax+b,\ a>0}.$$

Графічне представлення функції корисності для особи, байдужої до ризику, наведено на рис. 6.3.

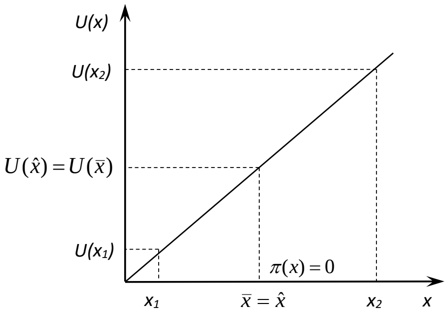


Рис. 6.3. Графік функції корисності особи, байдужої до ризику

При зростаючій функції корисності для всіх лотерей, особа тоді і тільки тоді є:

– несхильною до ризику, коли премія за ризик є додатною $\boldsymbol{\left(\pi(x)>0,\ \bar{x}>\hat{x}\right)}$;

– схильною до ризику, коли премія за ризик є від'ємною $\boldsymbol{\left(\pi(x)<0,\ \bar{x}<\hat{x}\right)}$;

– байдужою до ризику, коли премія за ризик рівна нулю $\boldsymbol{\left(\pi(x)=0,\ \bar{x}=\hat{x}\right)}$.

При різних рівнях доходу (багатства) ставлення людини до ризику може змінюватись. Є поширеною гіпотеза для широкого кола суб'єктів, що особи схильні до ризику при невеликих сумах (відносно загального достатку) та несхильні при значних сумах.

Графічно ця гіпотеза зображена на рис. 6.4.

Функція, яка описує дану гіпотезу, називається функцією схильності-несхильності до ризику. Звідси слідує висновок: ставлення до ризику – це локальна характеристика особи.

Якщо людина більш заможна, то вона може дозволити собі ризикнути більшою сумою. Чим заможніша людина, тим більш праворуч на графіку буде розташована зона несхильності до ризику.

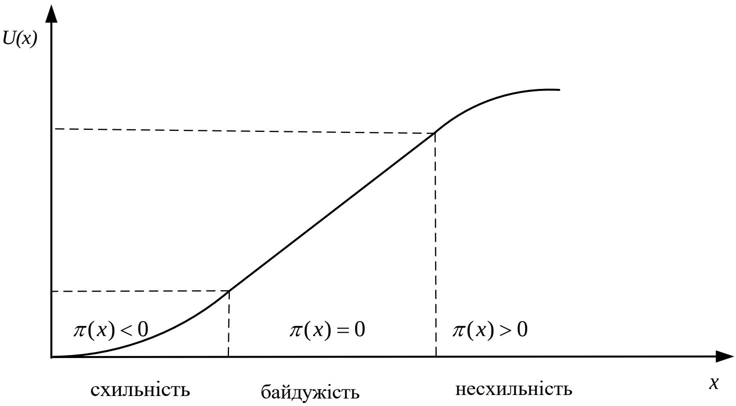


Рис. 6.4. Функція схильності-несхильності до ризику

Аналітично функції корисності такого типу можна задати за допомогою функції розподілу ймовірностей:

$$\boldsymbol{F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases}}$$

Несхильність (або байдужість) до ризику використовується страховими компаніями, які скуповують ризик. На схильності до ризику функціонує гральний бізнес.

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

Приклади розв’язання типових задач

Приклад 6.1.

Нехай задано функцію корисності $U(x) = 3\lg(x+20)$. Особа, яка приймає рішення, має справу з лотереєю $L(80;\, 0{,}5;\, 205)$. Обчислити сподіваний виграш, детермінований еквівалент та премію за ризик.

Розв’язання

Знайдемо сподіваний виграш для лотереї, скориставшись формулою (6.1):

$$\bar{x} = M(X) = 0{,}5 \cdot 80 + 0{,}5 \cdot 205 = 40 + 102{,}5 = 142{,}5\,.$$

Детермінований еквівалент обчислимо з рівняння (6.3):

$$3\lg(\hat{x}+20) = 0{,}5 \cdot 3\lg(80+20) + 0{,}5 \cdot 3\lg(205+20),$$

$$\lg(\hat{x}+20) = 0{,}5 \cdot (\lg(100) + \lg(225)),$$

$$\lg(\hat{x}+20) = \lg(100 \cdot 225)^{1/2},$$

$$\hat{x}+20 = (100 \cdot 225)^{1/2},$$

$$\hat{x} = \sqrt{100 \cdot 225} - 20,$$

$$\hat{x} = 150 - 20 = 130.$$

Визначимо премію за ризик за формулою (6.7):

$$\pi(x) = 142{,}5 - 130 = 12{,}5.$$

Відповідь: сподіваний виграш становить ***142,5***; детермінований еквівалент – ***130***; премія за ризик – ***12,5***. Оскільки $\pi(x) > 0$, то особа несхильна до ризику. На це вказує також тип функції корисності $U(x) = 3\lg(x+20)$ – логарифмічна функція.

Приклад 6.2.

Особа розглядає можливість участі в одній з двох лотерей.

Лотерея *I* описується як така, що з імовірністю ***0,7*** призводить до результату ***2500*** або з імовірністю ***0,3*** до результату ***6400.***

Лотерея *II* описується як така, що з імовірністю ***0,6*** призводить до результату ***3000*** або з імовірністю ***0,4*** до результату ***4500***.

Функція корисності особи має вигляд $U(x) = 10\sqrt{x}$.

Знайти сподіваний виграш, сподівану корисність, детермінований еквівалент та премію за ризик для даних лотерей. Вказати тип ставлення до ризику за значенням премії за ризик і за даною функцією корисності. Якій з цих лотерей особа віддасть перевагу?

Розв'язання.

Знайдемо сподіваний виграш для лотерей, скориставшись формулою (6.1):

$$\bar{x}_I = M_I(X) = 0{,}7 \cdot 2500 + 0{,}3 \cdot 6400 = 1750 + 1920 = 3670,$$

$$\bar{x}_{II} = M_{II}(X) = 0{,}6 \cdot 3000 + 0{,}4 \cdot 4500 = 1800 + 1800 = 3600.$$

Сподівану корисність знайдемо за формулою (6.2):

$$\bar{U}_I(x) = M_I(U(x)) = 0{,}7 \cdot 10\sqrt{2500} + 0{,}3 \cdot 10\sqrt{6400} = \\ = 350 + 240 = 590,$$

$$\bar{U}_{II}(x) = M_{II}(U(x)) = 0{,}6 \cdot 10\sqrt{3000} + 0{,}4 \cdot 10\sqrt{4500} = \\ = 328{,}63 + 268{,}33 = 596{,}96.$$

Детермінований еквівалент обчислимо із співвідношення (6.3):

$$10\sqrt{\hat{x}_I} = 590,$$

$$\sqrt{\hat{x}_I} = 59,$$

$$\hat{x}_I = 3481.$$

$$10\sqrt{\hat{x}_{II}} = 596{,}96,$$

$$\sqrt{\hat{x}_{II}} = 59{,}696,$$

$$\hat{x}_{II} = 3563{,}61.$$

Премію за ризик обчислимо за формулою (6.7):

$$\pi_I(x) = 3670 - 3481 = 189,$$

$$\pi_{II}(x) = 3600 - 3563{,}61 = 36{,}39.$$

Оскільки $\pi(x) > 0$, то особа несхильна до ризику. На це вказує також тип функції корисності $U(x) = 10\sqrt{x}$.

Відповідь: особа віддасть перевагу другій лотереї, оскільки її сподівана корисність більша, $\bar{U}_{II}(x) > \bar{U}_I(x)$ ($596{,}96 > 590$).

Приклад 6.3.

Користуючись концепцією корисності за Нейманом, порівняйте ефективність рішень, поданих у табл. 6.5:

Таблиця 6.5.

Рішення	***Варіанти доходів, тис. грн***		
I	25	27	30
II	20	28	32
III	24	26	33
Ймовірності	0,2	0,5	0,3

Відомо, що функція корисності задається формулою:
$$U(x) = 0{,}5x^2 - 7x + 120.$$

Розв'язання.

Знайдемо сподівану корисність кожного рішення за формулою (6.2):

$$\bar{U}_I(x) = M_I(U(x)) = 0{,}2 \cdot \left(0{,}5 \cdot 25^2 - 7 \cdot 25 + 120\right) + 0{,}5 \cdot \left(0{,}5 \cdot 27^2 - 7 \cdot 27 + 120\right) + 0{,}3 \cdot \left(0{,}5 \cdot 30^2 - 7 \cdot 30 + 120\right) = 51{,}5 + 147{,}75 + 108 = 307{,}25;$$

$$\bar{U}_{II}(x) = M_{II}(U(x)) = 0{,}2 \cdot \left(0{,}5 \cdot 20^2 - 7 \cdot 20 + 120\right) + 0{,}5 \cdot \left(0{,}5 \cdot 28^2 - 7 \cdot 28 + 120\right) + 0{,}3 \cdot \left(0{,}5 \cdot 32^2 - 7 \cdot 32 + 120\right) = 36 + 158 + 122{,}4 = 316{,}4;$$

$$\bar{U}_{III}(x) = M_{III}(U(x)) = 0{,}2 \cdot \left(0{,}5 \cdot 24^2 - 7 \cdot 24 + 120\right) + 0{,}5 \cdot \left(0{,}5 \cdot 26^2 - 7 \cdot 26 + 120\right) + 0{,}3 \cdot \left(0{,}5 \cdot 33^2 - 7 \cdot 33 + 120\right) = 48 + 138 + 130{,}05 = 316{,}05.$$

Порівнюючи значення сподіваної корисності кожного рішення, обираємо максимальне з них:

$$\max\left\{\bar{U}_I(x); \bar{U}_{II}(x); \bar{U}_{III}(x)\right\} = \max\left\{307{,}25;\ 316{,}4;\ 316{,}05\right\} = 316{,}4.$$

Відповідь: найефективнішим є *II* рішення, оскільки його сподівана корисність є найбільшою, менш ефективним є *III* рішення і найменшу сподівану корисність має *I* рішення, тобто воно є найменш ефективним:

$$\bar{U}_{II}(x) > \bar{U}_{III}(x) > \bar{U}_I(x).$$

Приклад 6.4.

Лотерею задано з рівномірною щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<10; \\ \dfrac{1}{20}, & 10\le x\le 30; \\ 0, & x>30. \end{cases}$$

Функція корисності має вигляд $U(x)=-e^{-4x}$. Обчислити сподіваний виграш, детермінований еквівалент та премію за ризик. Вказати тип ставлення до ризику за даною функцією корисності.

Розв'язання.

Знайдемо сподіваний виграш для лотереї, скориставшись формулою (6.5):

$$\bar{x}=M(X)=\int_{10}^{30}\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{20}\int_{10}^{30}xdx=\frac{1}{40}x^2\Big|_{10}^{30}=\frac{1}{40}(900-100)=20.$$

Детермінований еквівалент обчислимо з рівняння (6.3):

$$-e^{-4\hat{x}}=\int_{10}^{30}\frac{1}{4}\left(-e^{-4x}\right)dx=-\frac{1}{4}\int_{10}^{30}e^{-4x}dx=e^{-4x}\Big|_{10}^{30}=e^{-120}-e^{-40},$$

$$e^{-4\hat{x}}=e^{-40}-e^{-120},$$

$$\ln e^{-4\hat{x}}=\ln\left(e^{-40}-e^{-120}\right),$$

$$-4\hat{x}\ln e=\ln\left(e^{-40}-e^{-120}\right),$$

$$\hat{x}=-\frac{\ln\left(e^{-40}-e^{-120}\right)}{4}=-\frac{-40}{4}=10.$$

Визначимо премію за ризик за формулою (6.7):

$$\pi(x)=20-10=10.$$

Відповідь: сподіваний виграш дорівнює 20; детермінований еквівалент – 10; премія за ризик – 10. Оскільки $\pi(x)>0$, то особа несхильна до ризику. На це вказує також тип функції корисності $U(x)=-e^{-4x}$ – експоненційна функція.

Приклад 6.5.

Інвестор, функцію корисності якого визначено як $U(x)=3x^3-100$, розглядає інноваційний проект представлений лотереєю $L(4;0{,}3;\ 4{,}6;0{,}35;\ 4{,}8;0{,}15;\ 5{,}1;0{,}2)$, виграші якої відображають можливі прибутки (млн грн), які він може одержати при реалізації даного проекту. Знайти сподіваний виграш, сподівану корисність, детермінований еквівалент та премію за ризик для даної лотереї. Чи візьме участь інвестор у реалізації даного проекту?

Розв'язання.

За формулою (6.1) знайдемо сподіваний виграш для лотереї:

$$\bar{x} = M(X) = 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}35 \cdot 4{,}6 + 0{,}15 \cdot 4{,}8 + 0{,}2 \cdot 5{,}1 =$$
$$= 1{,}2 + 1{,}61 + 0{,}72 + 1{,}02 = 4{,}55 \text{ млн грн.}$$

Сподівану корисність знайдемо за формулою (6.2):

$$\overline{U}(x) = M(U(x)) = 0{,}3 \cdot (3 \cdot 4^3 - 100) + 0{,}35 \cdot (3 \cdot 4{,}6^3 - 100) +$$
$$+ 0{,}15 \cdot (3 \cdot 4{,}8^3 - 100) + 0{,}2 \cdot 0{,}15 \cdot (3 \cdot 5{,}1^3 - 100) =$$
$$= 92 + 192{,}008 + 0{,}72 + 231{,}776 + 297{,}953 = 813{,}737.$$

Із співвідношення (6.3) обчислимо детермінований еквівалент:

$$3 \cdot \hat{x}^3 - 100 = 813{,}737,$$
$$\hat{x}^3 = 304{,}579,$$
$$\hat{x} = 6{,}728 \text{ млн грн.}$$

За формулою (6.7) обчислимо премію за ризик:

$$\pi(x) = 4{,}55 - 6{,}728 = -2{,}178 \text{ млн грн.}$$

Відповідь: оскільки $\pi(x) < 0$, то інвестор схильний до ризику. Сподівана корисність від участі в лотереї становить $\boldsymbol{813{,}737}$ утилів. Отже, інвестор прийме участь у реалізації даного інвестиційного проекту.

Задачі для самостійного опрацювання

Завдання 6.1.

Побудуйте інтервально-нейтральну функцію корисності підприємця щодо його одноденного прибутку. Величина одноденного прибутку та відповідні значення функції корисності підприємця щодо прибутку наведені в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1.

Значення прибутку	*Значення функції корисності*
0	0
500+ N	10
1000+2N	25
1500+3N	45
2000+4N	75
2500+5N	110
3000+6N	150
3500+6N	200

Завдання 6.2.

Лотерею задано з рівномірною щільністю розподілу $f(x)$. Функція корисності має вигляд $U(x) = -e^{-cx}$. Обчислити сподіваний виграш, детермінований еквівалент та премію за ризик даної лотереї за варіантом, наведеним у таблиці 6.2. Вказати тип ставлення до ризику за даною функцією корисності. Зобразити графічно.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ \dfrac{1}{x_2 - x_1}, & x_1 \le x \le x_2; \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

Таблиця 6.2.

№ варіанту	***C***	x_1	x_2
1, 16	0,1	0	10
2, 17	0,2	10	20
3, 18	0,3	20	30
4, 19	0,4	5	10
5, 20	0,5	5	20
6, 21	0,6	5	30
7, 22	0,7	0	5
8, 23	0,8	10	30
9, 24	0,9	20	40
10, 25	0,11	5	15
11, 26	0,12	0	15
12, 27	0,13	10	25
13, 28	0,14	20	50
14, 29	0,15	5	25
15, 30	0,16	5	35

Завдання 6.3.

Лотерея описується як така, що з імовірністю ***0,6*** призводить до результату x_1 або з імовірністю ***0,4*** – до результату x_2. Функція корисності має вигляд $U(x) = lg(x+b)$, $x > -b$. Знайти сподіваний виграш, детермінований еквівалент та премію за ризик для даної лотереї. Дані варіантів наведено у таблиці 6.3. Вказати тип ставлення до ризику за значенням премії за ризик і за даною функцією корисності.

Таблиця 6.3.

№ варіанту	***B***	x_1	x_2
1, 16	5	0	10
2, 17	6	10	20
3, 18	7	20	30
4, 19	8	10	30
5, 20	9	0	15
6, 21	10	10	25
7, 22	11	20	25
8, 23	12	10	15
9, 24	13	0	5
10, 25	14	10	35
11, 26	15	20	35
12, 27	16	10	40
13, 28	17	10	45
14, 29	18	20	40
15, 30	20	30	50

Завдання 6.4.

Нехай особа має функцію корисності $U(x)$.

Ця особа вивчає для себе можливість участі в одній з лотерей $L_1(10+N;0,6;30+N)$ та $L_2(20+N/2;0,2;30+2N)$.

Якій з цих лотерей вона віддасть перевагу, якщо функція корисності цієї особи задається наступним чином:

1. $U(x)=3N/10x^2+5Nx+4N$;
2. $U(x)=3N\sqrt{7x}$;
3. $U(x)=0{,}75N+7Nx/10$.

Як ця особа ставиться до ризику в кожному з випадків? Зобразити графічно.

Завдання 6.5.

Особа має функцію корисності $U(x)=ax^2+b$. Вона має три альтернативних варіанти вибору нового місця роботи. Перше місце роботи пов’язане зі стабільним прибутком у ***4*** тис. грн. Друге місце роботи пов’язане з ризиком: або мати прибуток розміром ***6*** тис. грн з ймовірністю ***0,5*** або ***2*** тис. грн з тією ж ймовірністю. Третє місце роботи пов’язане з ризиком мати ***4*** тис. грн з ймовірністю ***0,5*** або не мати жодного доходу. Яке місце роботи доцільно обрати цій особі?

Обчисліть премію за ризик для обраного місця роботи. Дані наведено у таблиці 6.4.

Таблиця 6.4.

№ варіанту	***a***	***b***
1, 16	0,01	0
2, 17	0,02	1
3, 18	0,03	2
4, 19	1,0	3
5, 20	2,0	4
6, 21	0,05	5
7, 22	0,06	6
8, 23	0,03	7
9, 24	1,1	8
10, 25	1,5	9
11, 26	2,5	10
12, 27	0,5	12
13, 28	0,6	13
14, 29	0,7	14
15, 30	0,8	15

Завдання 6.6.

Підприємець, функція корисності якого задана як $U(x) = N\sqrt{x}$ вирішує, як йому краще використати частину свого капіталу розміром ***(100+N)*** тис. грн. Ці кошти він може:

1. Покласти в банк на депозитний рахунок з відсотковою ставкою в розмірі ***(10+N)***% на рік;

2. Вкласти в інвестиційний проект і одержати прибуток ***(15+N)***% від вкладених коштів з імовірністю ***(0,3+N/100)***%, або повернути вкладений капітал у разі невдачі.

Як підприємцю доцільніше використати свій капітал? Обчисліть премію за ризик обох альтернатив і розкрийте її економічну суть.

Завдання 6.7.

Інвестиційний проект представлений лотереєю

L(100+N, 0,3+N/250; 150+N, 0,25–N/200; 180+N, 0,20+N/200; 220+N, 0,15–N/250; 270+N, 0,1),

виграші якої відображають можливі прибутки (тис. грн), які може одержати інвестор при реалізації даного проекту.

Знайти сподіваний виграш, детермінований еквівалент та премію за ризик для даної лотереї. Чи візьме участь інвестор у реалізації даного проекту, якщо його функція корисності має вигляд $U(x) = 0{,}5Nx^2 + 7Nx + 40N$?

Тести для перевірки знань

1. **Під лотереєю $L(x_*, p(x), x^*)$ розуміють ситуацію, у якій:**
   a) особа може отримати x_* або x^* з ймовірністю $p(x)$;
   b) особа може отримати x^* з ймовірністю $p(x)$ або x_* з ймовірністю $1 - p(x)$;
   c) особа може отримати можливі виграші x_* або x^* або $p(x)$;
   d) особа може отримати x_* з ймовірністю $p(x)$ або x^* з ймовірністю $1 - p(x)$.

2. **Особа є схильною до ризику, якщо:**
   a) вона має функцію корисності $U(x) = 10 + 7x$;
   b) вона має функцію корисності $U(x) = 3e^{-2x}$;
   c) вона має функцію корисності $U(x) = 7\sqrt{5x}$;
   d) вона має функцію корисності $U(x) = 9x^2 + 5$.

3. **Особа є несхильною до ризику, якщо детермінований еквівалент лотереї, у якій вона бере участь:**
   a) дорівнює нулю;
   b) менший сподіваного виграшу в лотереї;
   c) більший сподіваного виграшу в лотереї;
   d) рівний сподіваному виграшу в лотереї.

4. **Детермінований еквівалент – це:**
   a) гарантована сума, одержання якої еквівалентне участі в лотереї;
   b) сума, якою суб'єкт прийняття рішень згоден знехтувати з суми середнього (сподіваного) виграшу, щоб уникнути ризику, пов'язаного з лотереєю;
   c) гарантована сума, одержання якої еквівалентне не участі в лотереї;
   d) сума, якою суб'єкт прийняття рішень згоден знехтувати з суми максимального виграшу, щоб уникнути ризику, пов'язаного з лотереєю.

5. **Особу, яка приймає рішення, називають схильною до ризику, якщо:**
   a) для неї більш пріоритетним є можливість одержати гарантовано сподіваний виграш $\bar{x}$ у лотереї ніж величину детермінованого еквіваленту;
   b) для неї більш пріоритетним є можливість одержати величину детермінованого еквіваленту у лотереї ніж брати участь у ній;
   c) для неї більш пріоритетним є можливість одержати гарантовано сподіваний виграш $\bar{x}$ у лотереї ніж брати участь у ній;
   d) для неї більш пріоритетною є участь у лотереї ніж можливість одержати гарантовано сподіваний виграш.

6. **Якщо премія за ризик $\pi(x) < 0$, то особа:**
   a) байдужа до ризику;
   b) несхильна до ризику;
   c) схильна до ризику;
   d) нейтральна до ризику.

7. Премія за ризик – це:

a) гарантована сума, одержання якої еквівалентне участі в лотереї;

b) сума, яка дорівнює максимальному сподіваному значенню корисності результатів;

c) сума, яку суб’єкт керування згоден заплатити, щоб взяти участь у лотереї;

d) сума, якою суб’єкт керування згоден знехтувати з середнього виграшу, щоб уникнути ризику, пов’язаного з лотереєю.

8. Діяльність грального бізнесу базується на принципі:

a) об’єднання ризику;

b) страхування ризику;

c) диверсифікації ризику;

d) схильності до ризику.

9. Нехай особа має функцію корисності $U = U(x)$ і бере участь в лотереї $L = L(x, p, y)$. Тоді вона є схильною до ризику, якщо:

a) $U(px + (1-p)y) = pU(x) + (1-p)U(y)$;

b) $U(px + (1-p)y) < pU(x) - (1-p)U(y)$;

c) $U(px + (1-p)y) > pU(x) + (1-p)U(y)$;

d) $U(px + (1-p)y) < pU(x) + (1-p)U(y)$.

10. Якщо можливі виграші описуються щільністю розподілу $f(x)$, то детермінований еквівалент $\hat{x}$ можна знайти із виразу (де $U(x)$ – функція корисності):

a) $U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x} f(x) dx$;

b) $U(\hat{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) f(x) dx$;

c) $U(\hat{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$;

d) $U(\hat{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x U(x) dx$.

Контрольні питання

1. Розкрийте суть теорії корисності.
2. Поясніть зв'язок між поняттями "пріоритет" та "функція корисності".
3. Сформулюйте закон спадної граничної корисності.
4. Сформулюйте основну властивість функції корисності.
5. Дайте визначення поняттю "лотерея".
6. Наведіть основну формулу теорії сподіваної корисності.
7. В чому відмінність між сподіваним виграшем лотереї та сподіваною корисністю лотереї?
8. Визначте тип ставлення особи до ризику, якщо для неї більш пріоритетною є участь в лотереї, ніж можливість отримання гарантовано сподіваного виграшу.
9. Визначте тип ставлення особи до ризику, якщо для неї більш пріоритетною є можливість отримання гарантовано сподіваний виграш в лотереї, ніж участь в самій лотереї.
10. Визначте тип ставлення особи до ризику, якщо вона не робить різниці між можливістю отримання гарантовано сподіваного виграшу в лотереї та участю в ній.
11. Сформулюйте умову несхильності до ризику.
12. Сформулюйте умову схильності до ризику.
13. Сформулюйте умову байдужості до ризику.
14. Наведіть приклади функцій корисності для осіб з різним ставленням до ризику.
15. Дайте визначення детермінованого еквівалента.
16. Розкрийте суть поняття "премія за ризик".
17. Як за значенням премії за ризик можна визначити ставлення особи до ризику?
18. На прикладах проінтерпретуйте функцію корисності з інтервальною нейтральністю до ризику.
19. Зобразіть криві байдужості для осіб з різним ставленням до ризику.
20. На прикладах поясніть графічне розташування кривих схильності-несхильності до ризику двох осіб з різним ставленням до ризику.
21. Як обчислюється міра локальної несхильності до ризику?

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Артим-Дрогомирецька З.Б. Економічний ризик: навч.-метод. посібник / З. Б. Артим-Дрогомирецька, М. В. Негрей / Львів: Магнолія-2006, 2013. – 320 с.
2. Вітлінський В.В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
3. Вітлінський В.В. Ризик у менеджменті / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний – К.: ТОВ ”Борисфен-М”, 1996. – 336 с.
4. Грабовый П.Г. Риски в современном бизнесе / П.Г. Грабовый, С.Н. Петрова, С.И. Полтавцев – М.: Аланс, 1994. – 240 с.
5. Донець Л.І. Економічні ризики і методи їх вимірювання: Навчальний посібник / Л.І. Донець – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 312 с.
6. Івченко І.Ю. Економічні ризики: Навчальний посібник [мультимедійний підручник] / І.Ю. Івченко – Київ: «Центр навчальної літератури», 2004. – 304 с.
7. Ілляшенко С.М. Економічний ризик: Навчальний посібник. 2-ге вид., доп. перероб. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 220 с.
8. Камінський А.Б. Моделювання фінансових ризиків: Монографія / А.Б. Камінський – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
9. Клименюк М.М. Управління ризиками в економіці: [навч.посіб.] / М. М. Клименюк, І. А. Брижань. – К.: Просвіта, 2000. – 256 с.
10. Матвійчук А.В. Економічні ризики в інвестиційній діяльності. Монографія / А.В. Матвійчук – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 205 с.
11. Машина Н.І. Економічний ризик і методи його вимірювання: Навч. посіб. / Н.І. Машина – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188 с.
12. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику: Навч. посібник / О.І. Ястремський – К.: ”АртЕк”, 1997. – 248 с.

ТЕМА 7

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

В багатьох управлінських задачах потрібно аналізувати ситуації, в яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, коли стикаються інтереси двох чи більше конкуруючих сторін, кожна з яких прагне досягти своєї мети, при чому результат будь-якої дії кожної із сторін залежить від того, які дії робитиме противник.

Конфліктною називається ситуація, в якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, що мають суперечливі цілі, причому виграш кожної із сторін залежить від того, як поводитимуться інші сторони.

Приклади конфліктних ситуацій: бойові дії, біржові угоди, різні види виробництва в умовах конкуренції, угоди на фондовому ринку, спортивні змагання, інші змагання, ігри.

Типовий конфлікт характеризується трьома основними складовими:

– зацікавленими сторонами;
– можливими діями цих сторін;
– інтересами сторін.

У житті конфлікт завжди супроводжується ризиком. Зазвичай конфліктна ситуація, взята з життя, досить складна. Для того, щоб аналіз конфліктних ситуацій був можливим, необхідно враховувати лише найсуттєвіші фактори, будувати спрощену формалізовану модель конфлікту, яку називають грою. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється тим, що проводиться за певними визначеними правилами. Будь-яка теоретико-ігрова модель повинна відображати, хто і як конфліктує, а також, хто і в якій формі зацікавлений в тому чи іншому результаті конфлікту. Науково обґрунтовані методи розв’язку задач з конфліктними ситуаціями дає теорія ігор.

Теорія ігор – це теорія математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності, протилежних інтересів різних сторін конфліктів. Матричні ігри можуть служити математичними моделями багатьох простих конфліктних ситуацій в області економіки. Зокрема, теорія ігор застосовується у прийнятті рішень у боротьбі за ринки, у явищах олігополії, в плануванні рекламних кампаній, при формуванні цін на конкурентних ринках, в обмінних і торгівельних операціях, в біржових іграх, в аналізі коаліційної поведінки та ін.

Перші роботи в напрямку теорії ігор з’явилися на початку XX ст. Основоположником теорії ігор є американський математик Дж. фон Нейман, який у 1928 р. основну теорему теорії ігор – теорему про мінімакс. Значний розвиток теорія ігор отримала після виходу у 1944 р. книги Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна „Теорія ігор і економічна поведінка”, в якій вперше було дано систематизований, повний виклад теорії ігор. На даний час теорія ігор набула широкого поширення, зокрема, вчені, які займалися теорією ігор, отримали Нобелівську премію в напрямку економічних досліджень.

Метою теорії ігор є вироблення рекомендацій щодо розумної поведінки учасників конфлікту.

Розглянемо наступний приклад. Нехай необхідно прийняти рішення про випуск на ринок певного товару. Обсяг попиту на цей товар може бути точно відомим, або може бути відомий лише статистичний розподіл можливих значень попиту, або можуть бути відомими лише межі значень, яких може набувати величина попиту, але ніяких ймовірнісних суджень про його майбутні значення немає. Останній випадок – ситуація невизначеності. Така невизначеність може виникнути, коли попит залежить від метеорологічних умов або в умовах ринку, від діяльності конкурента тощо. Наведені приклади можуть бути зведені до гри.

У теорії ігор розроблена система власних понять:

- математична модель конфліктної ситуації називається *грою;*
- сторони у конфлікті називаються *гравцями* (можуть бути як окремі особи, так і колективи людей, які мають спільні цілі: конкуруючі підприємства, спортивні команди);
- результат гри називається *виграшем* або *нічиєю;*
- *правилами* гри називається перелік прав і обов’язків гравців;
- розрізняють поняття „*гра*” і „*партія гри*”. В даному випадку під грою розуміють сукупність правил, яка визначає поведінку

гравців, а під партією гри – реалізацію гри певним конкретним чином від початку до кінця (наприклад, партія гри в шахи);

- *ходом* називається вибір гравцем однієї з передбачених правилами гри дій. Ходи бувають особисті і випадкові. Особистий хід – це свідомий вибір гравця. Випадковий хід – вибір дії, що не залежить від його волі.

Залежно від кількості можливих ходів у грі, ігри поділяються на:

а) скінченні – ті, які передбачають скінчене число ходів;

б) нескінченні – ті, які передбачають нескінчене число ходів.

- *стратегією* гравця називається сукупність правил, що визначають вибір варіанта дій у кожному особистому ході;
- *оптимальною стратегією* гравця називається така стратегія, що забезпечує йому максимальний виграш;
- *завдання теорії ігор* полягає у виявленні оптимальної стратегії;
- ігри, що складаються тільки з випадкових ходів, називаються *азартними,* ними теорія ігор не займається. Її мета – оптимізація поведінки гравця у грі, де поряд з випадковими є особисті ходи. Такі ігри називаються *стратегічними;*
- гра називається *грою з нульовою сумою*, якщо сума виграшів всіх гравців дорівнює нулю, тобто кожен виграє за рахунок іншого;
- гра називається *парною,* якщо в неї грають два гравці. Парна гра з нульовою сумою називається *антагоністичною.* Теорія таких ігор найбільш розвинена. Крім того, такі ігри моделюють великий клас реальних конфліктів. В подальшому розглядатимемо саме антагоністичні ігри.

Основне припущення, на підставі якого знаходять оптимальні рішення в теорії ігор, полягає в тому, що супротивник такий же розумний, як і сам гравець.

Методи теорії ігор найбільш розвинені для скінченої однокрокової гри двох гравців з нульовою сумою, тобто сума виграшів гравців дорівнює нулю (виграш одного гравця дорівнює програшу другого, кожен гравець виграє за рахунок іншого).

Нехай у грі грають два гравці: $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Себе прийнято ототожнювати з гравцем $\boldsymbol{A}$. Нехай у гравця $\boldsymbol{A}$ є $\boldsymbol{m}$ можливих стратегій: $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_m}$, а в супротивника $\boldsymbol{B}$ – $\boldsymbol{n}$ можливих стратегій: $\boldsymbol{B_1, B_2, \dots, B_n}$. Така гра називається *грою* $\boldsymbol{m \times n}$.

Позначимо через a_{ij} – виграш гравця A при власній стратегії A_i $(i=\overline{1,m})$ та стратегії супротивника B_j $(j=\overline{1,n})$. Кількість таких ситуацій може бути $m\times n$.

Гру зручно відображати таблицею, яка називається *платіжною матрицею* або *матрицею виграшів*. Платіжна матриця має стільки стовпців, скільки стратегій у гравця B, і стільки рядків, скільки стратегій у гравця A. На перетині рядків і стовпців, що відповідають різним стратегіям, стоять виграші гравця A і, відповідно, програші гравця B:

Таблиця 7.1 .

Платіжна матриця

A \ B	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	....
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Зведення гри до матричної форми може бути важким і навіть не виконуваним завданням через незнання стратегій, через величезну їх кількість, а також складність оцінки виграшу.

Ці приклади саме й показують обмежені можливості теорії ігор, тому що у всіх подібних випадках задача не може бути розв’язана методами теорії ігор.

Скінчена парна гра з нульовою сумою називається також *матричною грою*, оскільки їй можна поставити у відповідність матрицю.

Слід звернути увагу на такий факт: виходячи з вигляду платіжної матриці, можна зробити висновок, які стратегії є свідомо невигідними. Це ті стратегії, для яких кожен з елементів відповідного рядка матриці є менше-рівним відповідних елементів іншого будь-якого рядка (бо кожен елемент матриці – це виграш гравця A, і якщо для будь-якої стратегії (рядка) всі виграші менші від виграшів іншої стратегії, то зрозуміло, що перша стратегія є менш вигідна, ніж друга, то її можна до уваги не брати).

Така операція відбраковування явно невигідних стратегій називається *мажоруванням*.

Методи знаходження оптимальних стратегій

Якщо задача зведена до матричної форми, то можна проводити пошук оптимальних стратегій. Для цього введемо поняття верхньої і нижньої ціни гри.

Нижньою ціною гри називається елемент матриці, для якого виконується умова:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (7.1)$$

Нижня ціна гри α показує, що хоч би яку стратегію застосовував гравець B, то гравець A гарантує собі виграш, не менший за α.

Верхньою ціною гри називається елемент матриці, що задовольняє умову:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (7.2)$$

Верхня ціна гри β гарантує для гравця B, що гравець A не одержить виграш, більший за величину β.

Точка (елемент) матриці, для якої виконується умова $\alpha = \beta$, називається *сідловою точкою*. У сідловій точці найбільший з мінімальних виграшів гравця A точно дорівнює найменшому з максимальних програшів гравця B, тобто мінімум у будь-якому рядку матриці дорівнює максимуму у будь-якому стовпці.

При аналізі платіжної матриці можливі два випадки:

Випадок а). Платіжна матриця має сідлову точку. Оскільки прийнято умову максимальної розумності гравців, то саме ті рядок і стовпець, які відповідають сідловій точці, і є оптимальними стратегіями.

Стратегії, які відповідають сідловій точці, є найбільш вигідними для обох гравців, і вони називаються *чистими стратегіями*.

Метод вибору стратегії на основі сідлової точки називається „*принцип мінімаксу”*, який інтерпретується так: чини так, щоб при найгіршій для тебе поведінці супротивника одержати максимальний виграш.

Для чистих стратегій матричної гри справедлива наступна теорема.

Теорема 1. В матричній грі нижня чиста ціна гри ніколи не перевищує значення верхньої чистої ціни гри, тобто $\alpha \le \beta$.

У таблиці 7.2 наведено приклад гри і її розв'язок. В даній грі кожний з двох гравців має чотири стратегії і не має інформації про те, яку стратегію застосує суперник.

Таблиця 7.2 .

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	16	14	13	14	13
A_2	22	17	20	19	17
A_3	16	16	14	19	14
A_4	22	15	22	17	15
$\max\limits_i a_{ij}$	22	17	22	19	**17** \ **17**

В першу чергу в кожній стрічці платіжної матриці вибирають мінімальні елементи і записують їх в останній стовпець, а в кожному стовпці – максимальні елементи і записують в останню стрічку тієї ж таблиці.

Потім визначається нижня і верхня ціна гри шляхом вибору максимального елемента в останньому стовпці таблиці і мінімального – в останній стрічці. В даному прикладі $\alpha = \beta = 17$. Відповідно, платіжна матриця має сідлову точку і оптимальними для гравців є чисті стратегії A_2 і B_2. Ціна гри $\gamma=17$.

Це означає, що якщо гравець A буде притримуватися своєї оптимальної стратегії A_2, він виграє не менше 17, але може виграти і більше, якщо гравець B відхилиться від своєї оптимальної стратегії B_2. Аналогічно, якщо гравець B притримується своєї оптимальної стратегії B_2, він програє не більше 17, але може програти і менше, якщо гравець A вибере одну із стратегій A_1, A_2, A_4.

Випадок б). Платіжна матриця не має сідлової точки. Це найбільш поширений випадок. У цій ситуації теорія пропонує використовувати змішані стратегії, тобто стратегії, у яких випадковим чином чергуються особисті стратегії.

Точний метод пошуку оптимальної змішаної стратегії зводиться до задачі лінійного програмування, хоч і не є складний, але трудомісткий.

Якщо в матричній грі відсутня сідлова точка в чистих стратегіях, то знаходять α і β (при чому $\alpha \neq \beta$, $\alpha < \beta$). У такій ситуації можна одержувати виграші, які в середньому більші від α, але менші від β.

Змішана стратегія гравця – це повний набір застосування його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в тих самих умовах із заданими ймовірностями.

Умови застосування змішаних стратегій є наступними:

- гра без сідлової точки;
- гравці використовують випадкове поєднання чистих стратегій із заданими ймовірностями;
- гра багаторазово повторюється у подібних умовах;
- при кожному з ходів жоден гравець не інформований про вибір стратегії іншим гравцем;
- допускаються усереднення результатів ігор.

Для гравця A змішана стратегія, що полягає у застосуванні чистих стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_m$, позначається матрицею

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_m \\ p_1 & p_2 & ... & p_m \end{pmatrix}, \text{ при умові, що } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

де p_i – ймовірність застосування i-ої стратегії гравцем A.

Для гравця B відповідно:

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & ... & B_n \\ q_1 & q_2 & ... & q_n \end{pmatrix}, \text{ при умові, що } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

де q_j – ймовірність застосування j-ої стратегії гравцем B.

При заданих векторах $\bar{p}$ та $\bar{q}$ та знаючи платіжну матрицю, можна визначити середній виграш гравця A:

$$\gamma = M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j, \qquad (7.3)$$

де γ – *ціна гри*, тобто середній виграш гравця A при використанні обома гравцями змішаних стратегій.

Отже, розв'язком матричної гри є:

1) $\bar{p}_0$ – оптимальна змішана стратегія гравця A;

2) $\bar{q}_0$ – оптимальна змішана стратегія гравця B;

3) γ – ціна гри.

Змішані стратегії будуть оптимальними, якщо вони утворюють сідлову точку для функції $M(A, \bar{p}_0, \bar{q}_0)$.

$$\boldsymbol{M(A,\bar{p}_0,\bar{q}_0)}=\underbrace{\max_p \min_q \boldsymbol{M(A,\bar{p},\bar{q})}}_{\alpha}=\underbrace{\min_q \max_p \boldsymbol{M(A,\bar{p},\bar{q})}}_{\beta},\quad(7.4)$$

при чому $\alpha=\beta=\gamma$.

Можна дати ще одне визначення оптимальних змішаних стратегій, зокрема $\bar{p}_0$ і $\bar{q}_0$ будуть *оптимальними змішаними стратегіями* відповідно учасників A і B, якщо вони задовольняють нерівність:

$$\boldsymbol{M(A,\bar{p},\bar{q}_0)}\le \boldsymbol{M(A,\bar{p}_0,\bar{q}_0)}\le \boldsymbol{M(A,\bar{p}_0,\bar{q})}.\quad(7.5)$$

З нерівності (7.5) слідує, що в сідловій точці ($\bar{p}_0$, $\bar{q}_0$) платіжна функція $\boldsymbol{M(A,\bar{p},\bar{q})}$досягає максимуму по змішаних стратегіях $\bar{p}$ учасника A і мінімуму по змішаних стратегіях $\bar{q}$ учасника B.

Слід зазначити, що при виборі оптимальної стратегії, гравцю A завжди буде гарантований середній виграш, не менший, ніж γ, за будь-якої фіксованої стратегії гравця B (а для гравця B навпаки).

Властивості змішаних стратегій

Нехай задана матрична гра з матрицею $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ і вказані деякі змішані стратегії $\bar{p}_0$ і $\bar{q}_0$, учасників A і B, а також число γ. Як перевірити, чи набір ($\bar{p}_0$,$\bar{q}_0$,γ) буде розв'язком гри?

Якщо скористатися нерівністю (7.5), то для відповіді на поставлене запитання потрібно перевірити останню нерівність для довільних змішаних стратегій $\bar{p}$ і $\bar{q}$. Однак різних змішаних стратегій $\bar{p}$ і $\bar{q}$ нескінченна множина. Тому безпосередня перевірка (7.5) неможлива. Відповідь на поставлене запитання дає наступна теорема.

Теорема 2. (Необхідні і достатні умови оптимальності змішаних стратегій). Для того, щоб змішані стратегії $\bar{p}^0=(p_1^0,p_2^0,...,p_m^0)^T$ і $\bar{q}^0=(q_1^0,q_2^0,...,q_n^0)^T$ були оптимальними для учасників A і B в грі з матрицею $\left\| a_{ij} \right\|_{m\times n}$ і ціною γ, необхідно і достатньо виконання нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 \geq \gamma, \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (7.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \leq \gamma, \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad (7.7)$$

Отже, щоб перевірити, чи набір ($\bar{p}_0$, $\bar{q}_0$, γ) є розв'язком матричної гри, достатньо перевірити, чи $\bar{p}_0$ і $\bar{q}_0$ задовольняють умови (7.6) і (7.7) та умови:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

$$p_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}; \qquad q_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Фактично, теорема про необхідні та достатні умови оптимальності стверджує, що якщо учасник A використовує оптимальну змішану стратегію $\bar{p}_0$, а учасник B будь-яку чисту стратегію B_j, то виграш учасника A буде не менше ціни гри γ; якщо учасник B використовує оптимальну змішану стратегію $\bar{q}_0$, а учасник A будь-яку чисту стратегію A_i, то програш учасника B не перевищує ціни гри γ.

Чисті стратегії учасника, що входять в його оптимальну стратегію із ймовірностями, відмінними від 0, називають *активними стратегіями* учасника.

Теорема 3. Якщо один із учасників вибирає свою оптимальну змішану стратегію, то його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри незалежно від того, яку стратегію вибирає його противник, лиш би тільки останній не виходив за межі своїх активних стратегій.

Теорема 4. Нехай $\bar{p}_0$ і $\bar{q}_0$ – оптимальні змішані стратегії учасників A і B в грі з матрицею $\left\| a_{ij} \right\|_{m\times n}$ і ціною гри γ. Тоді будуть $\bar{p}_0$ і $\bar{q}_0$ оптимальними змішаними стратегіями в грі з матрицею $\left\| ba_{ij} + c \right\|_{m\times n}$ ($b>0$) і ціною $\gamma' = b\gamma + c$.

Остання теорема дає можливість спрощувати платіжну матрицю, а значить, і визначення оптимальних стратегій учасників.

Зведення гри до задачі лінійного програмування

Нехай всі елементи матриці додатні $a_{ij} \geq 0$. Цього можна досягти, додавши до всіх елементів матриці велике число M. Внаслідок цього ціна гри збільшиться на M, а розв'язок S_A^* і S_B^* не зміниться. Якщо всі $a_{ij} \geq 0$, то і ціна гри $\gamma \geq 0$. Необхідно знайти розв'язок гри, тобто дві оптимальні стратегії $S_A^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$ і $S_B^* = (q_1, q_2, ..., q_n)$, які дають кожному гравцю максимально можливий для нього середній виграш (максимально можливий середній програш).

Знайдемо S_A^*. Відомо, що гравець A, застосовуючи свою оптимальну стратегію, не може виграти менше γ, навіть якщо гравець B застосовуватиме будь-які стратегії. На основі цього отримаємо:

$$\begin{aligned} &a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \geq \gamma, \\ &a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \geq \gamma, \\ &\vdots \\ &a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m \geq \gamma. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Поділимо обидві частини кожної нерівності на додатну величину γ:

$$\begin{aligned} &a_{11} \frac{p_1}{\gamma} + a_{21} \frac{p_2}{\gamma} + ... + a_{m1} \frac{p_m}{\gamma} \geq 1, \\ &a_{12} \frac{p_1}{\gamma} + a_{22} \frac{p_2}{\gamma} + ... + a_{m2} \frac{p_m}{\gamma} \geq 1, \\ &\vdots \\ &a_{1n} \frac{p_1}{\gamma} + a_{2n} \frac{p_2}{\gamma} + ... + a_{mn} \frac{p_m}{\gamma} \geq 1. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Введемо наступні позначення:

$$x_1 = \frac{p_1}{\gamma},\ x_2 = \frac{p_2}{\gamma}, ...,\ x_m = \frac{p_m}{\gamma}.$$

Тоді система матиме вигляд:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ &\vdots \\ &a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1, \end{aligned} \tag{7.10}$$

де $x_i \geq 0\ (i = \overline{1,m})$.

Оскільки $x_i = \frac{p_i}{\gamma}\ (i = \overline{1,m})$ і $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, то змінні x_1, $x_2, \ldots, x_m$ задовольняють умову $x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{\gamma}$.

Величина γ – це гарантований виграш гравця A. Його потрібно максимізувати, а відповідно, величину $\frac{1}{\gamma}$ – мінімізувати.

Таким чином, розв'язок гри зводиться до наступної задачі. Знайти такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$, які б задовольняли лінійні обмеження-нерівності і мінімізували лінійну функцію цих змінних, а саме:

$$\begin{aligned} &f = x_1 + x_2 + ... + x_m \to min; \\ &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ &\vdots \\ &a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1, \\ &x_i \geq 0,\ \left(i = \overline{1,m}\right). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Отримана задача є задачею лінійного програмування. Знайшовши значення $x_1, x_2, \ldots, x_m$, можна обчислити значення $p_1, p_2, \ldots, p_m, \gamma$, а отже, і оптимальну стратегію S_A^*.

Оптимальні стратегія S_B^* гравця B знаходиться аналогічно. Але гравець B прагне мінімізувати свій програш γ і, відповідно, величину $\frac{1}{\gamma}$ потрібно максимізувати, а обмеження матимуть вигляд „$\leq$”.

Для гравця B задача лінійного програмування матиме вигляд:

$$
\begin{aligned}
&z = y_1 + y_2 + ... + y_m \to max;\\
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1,\\
&a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1,\\
&\vdots\\
&a_{m1}y_1 + a_{2m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1,\\
&y_j \ge 0,\ \left(i = \overline{1,n}\right).
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

Дані задачі утворюють пару двоїстих задач. На основі першої теореми двоїстості $min\ f = max\ z$. Відповідно, отримаємо однакові ціни гри, тобто сідлову точку.

Графічний метод розв’язку матричних ігор

Нехай $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \end{pmatrix}$ – платіжна матриця гри $2\times n$.

Ціна гри і оптимальне значення S_A^* відповідно розв’язку наступного рівняння:

$$\gamma = \max_{p} \min_{1\le k\le n} (a_{1k}p + a_{2k}(1-p)). \tag{7.13}$$

Максимум функції

$$\min_{1\le k\le n} (a_{1k}p + a_{2k}(1-p)) \tag{7.14}$$

знаходять, побудувавши її графік.

Для цього припускають, що гравець A вибрав змішану стратегію $P = \{p, 1-p\}$, а гравець B – k-ту чисту стратегію, $k=1,2,\ldots,n$. Тоді середній виграш гравця A в ситуації $\{P, k\}$ буде рівним:

$$(k):\quad \gamma = a_{1k}p + a_{2k}(1-p).$$

На площині (p,γ) рівняння (k) описує пряму. Тим самим кожній чистій стратегії гравця B на цій площині відповідає своя пряма.

Тому спочатку на площині (p,γ) послідовно малюють всі прямі (рис. 7.1).

$$(k):\quad \gamma = a_{1k}p + a_{2k}(1-p), \qquad k = 1,2,...,n.$$

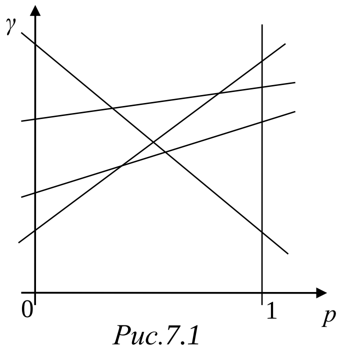


Рис.7.1

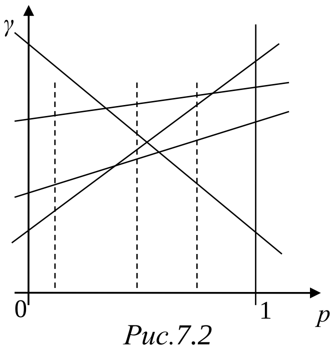


Рис.7.2

Потім для кожного значення ***p***, $\boldsymbol{0 \le p \le 1}$, шляхом візуального порівняння відповідних йому значень $\boldsymbol{\gamma}$ на кожній із побудованих прямих визначається і відзначається найменше з них (рис. 7.2).

В результаті описаної процедури отримують ламану, яка і є графіком функції (7.14) (рис.7.3). Ця ламана описує знизу все сімейство побудованих прямих.

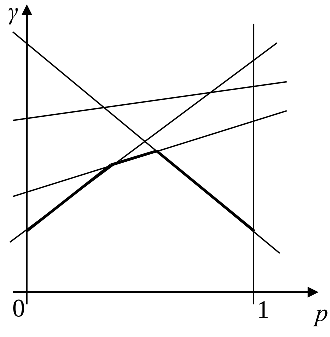


Рис.7.3

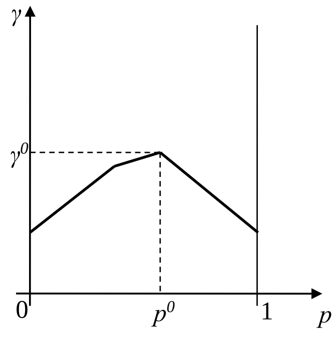


Рис.7.4

Верхня точка побудованої нижньої ламаної визначає і ціну гри – $\boldsymbol{\gamma}$, і оптимальну стратегію гравця $\boldsymbol{A - P^0=\{p^0,\ 1\text{-}\ p^0\}}$ (рис. 7.4).

При знаходженні оптимальної стратегії гравця ***B*** залежно від форми нижньої ламаної можуть бути такі випадки:

I. Нижня ламана має рівно одну найвищу точку $\boldsymbol{(p^0,\gamma^0)}$.

1) Якщо $\boldsymbol{p^0=0}$ (оптимальна стратегія гравця ***A*** – чиста стратегія $\boldsymbol{A_2}$), то гравцю ***B*** вигідно застосувати чисту стратегію, яка відповідає

прямій, яка проходить через точку $(0, \gamma^0)$ і має найбільший від'ємний нахил.

2) Якщо $p^0=1$ (оптимальна стратегія гравця A – чиста стратегія A_1), то оптимальною для гравцю B є чиста стратегія, яка відповідає прямій, що проходить через точку $(1, \gamma^0)$ і має найменший від'ємний нахил.

3) Якщо $0<p^0<1$, то в найвищій точці нижньої ламаної пересікаються щонайменше дві прямі, одна із яких (k-та) має позитивний нахил, а інша (l-та) – від'ємний, і оптимальна змішану стратегію гравця B отримують, поклавши:

$$q_k = q,\ q_l = 1-q, q_j = 0,\ j \neq k,l,$$

де q – розв'язок рівняння:

$$a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q).$$

II. Нижня ламана має горизонтальний відрізок, який відповідає чистій стратегії k^0 гравця B, яка і є оптимальною для нього.

Теорема 5 (основна теорема матричних ігор). Будь-яка кінцева матрична гра двох осіб з нульовою сумою завжди має розв'язок в змішаних стратегіях.

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 7.1. Дано платіжну матрицю (табл. 7.3). Спростити матрицю за рахунок відраховування явно невигідних стратегій.

Таблиця 7.3 .

Платіжна матриця

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1150	1260	560	1120
A_2	3540	820	1460	1800
A_3	260	1070	140	1100
A_4	580	2920	1500	1800
A_5	750	100	500	1230
A_6	4810	350	1120	500

Розв'язання:

У даній матриці елементи стратегії A_3 менші за відповідні елементи стратегії A_1. Отже, стратегія A_3 є невигідною порівняно із A_1, тому A_3 може бути відкинута.

Аналогічно, елементи стратегії A_5 менші за відповідні елементи стратегії A_2, тому і стратегія A_5 може бути відкинута.

У підсумку платіжна матриця після мажорування набуде вигляду:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1150	1260	560	1120
A_2	3540	820	1460	1800
A_4	580	2920	1500	1800
A_6	4810	350	1120	500

Відповідь: для прийняття рішень щодо оптимальної поведінки гравців ***A*** та ***B*** слід аналізувати платіжну матрицю, яка складатиметься із стратегій гравця ***A***: $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_4}$ та $\boldsymbol{A_6}$ і стратегій гравця ***B***: $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_3}$ та $\boldsymbol{B_4}$.

Приклад 7.2. Знайти сідлову точку у грі, що характеризується платіжною матрицею:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	-50	10	10	30	-50	*-50*
A_2	40	20	-50	-60	-20	*-60*
A_3	50	30	40	60	40	*30*
A_4	70	-30	30	10	-60	*-60*
	70	*30*	*40*	*60*	*40*	

Розв'язання:

$$\boldsymbol{\alpha = \max_i(-50; -60; 30; -30) = 30 = a_{32};}$$
$$\boldsymbol{\beta = \min_j(70; 30; 40; 60; 40) = 30 = a_{32}.}$$

Отже, $\boldsymbol{\alpha = \beta = 30}$ – це сідлова точка на перетині стратегій $\boldsymbol{A_3}$ та $\boldsymbol{B_2}$.

Приклад 7.3. Знайти розв'язок гри, яка матрицею $\boldsymbol{2{\times}5}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Проведемо аналіз гри на наявність сідлової точки:

$$\boldsymbol{\alpha = \max_i(-1; -1) = -1;}$$
$$\boldsymbol{\beta = \min_j(4; 3; 1; 2; 3) = 4.}$$

Нижня ціна гри дорівнює ***-1***, верхня дорівнює ***4***. Сідлової точки немає. Розв'язок гри потрібно шукати в змішаних стратегіях.

Обчислимо середні виграші гравця ***A*** (при умові, що гравець ***B*** вибирає лише чисті стратегії).

Із таблиці

$$\begin{array}{c|ccccc} p & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1-p & 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

отримуємо:

$$
\begin{aligned}
(B1):&\quad \gamma = p + 4(1-p);\\
(B2):&\quad \gamma = 3p - (1-p);\\
(B3):&\quad \gamma = -p + (1-p);\\
(B4):&\quad \gamma = 2(1-p);\\
(B5):&\quad \gamma = -p + 3(1-p).
\end{aligned}
$$

На координатній площині ***(p,γ)*** побудуємо ***5*** прямих, рівняння яких отримано вище, і знаходимо ламану.

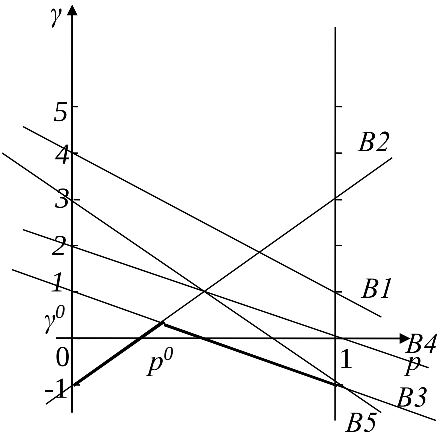


Рис. 7.5

Знайдемо ціну гри і оптимальної змішаної стратегії гравця ***A***.

При побудові ламаної неважко визначити, на перетині яких двох із п'яти прямих лежить її найвища точка. В даному випадку це прямі (***B2***) і (***B3***) , задані рівняннями:

$$\gamma = 3p - (1-p);$$
$$\gamma = -p + (1-p).$$

Отримаємо: $\gamma = \frac{1}{3};\ P^0 = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

Змішана стратегія гравця ***B***: $Q^0 = \{q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0, q_5^0\}$.

Для знаходження Q^0 покладають:

$$q_1^0 = 0,\ q_2^0 = q,\ q_3^0 = 1-q,\ q_4^0 = 0,\ q_5^0 = 0.$$

Прирівняємо будь-який із двох середніх виграшів гравця B, який відповідає змішаній стратегії:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & q & 1-q & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

до ціни гри:

$$3q-(1-q)=\frac{1}{3}, \qquad 4q=\frac{4}{3},$$

Отримаємо: $q^0 = \frac{1}{3}$.

Повний розв'язок гри має наступний вигляд:

$$\gamma = \frac{1}{3};\ P^0 = \left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\};\ Q^0 = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,0\right\}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

Задача 7.1. Спростити гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.4):

Таблиця 7.4.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	4	8	6
A_2	1	4	6	4
A_3	2	4	8	6
A_4	8	6	2	1

Задача 7.2. Спростити гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.5):

Таблиця 7.5.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
A_1	10	2	14	3	12	6	5	9	6	6
A_2	6	6	18	9	3	12	8	13	12	10
A_3	12	9	14	4	14	7	8	9	7	9
A_4	9	6	11	1	11	4	5	6	4	6
A_5	12	11	15	11	1	14	0	10	14	13
A_6	6	2	9	1	13	4	13	4	4	9
A_7	14	11	16	6	16	9	10	11	9	11
A_8	13	2	15	14	13	17	3	10	17	7
A_9	6	6	18	9	3	12	8	13	12	10
A_{10}	14	11	16	6	16	9	10	11	9	11

Задача 7.3. Спростити гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.6):

Таблиця 7.6.

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	4	14	8	8
A_2	16	12	10	18	6
A_3	4	4	8	16	8
A_4	4	2	12	8	6
A_4	16	12	10	18	6

Задача 7.4. Знайти нижню ціну гри, верхню ціну гри, визначити сідлові точки, оптимальні чисті стратегії та ціну гри (якщо вони існують) для гри, яка задана матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 7.5. Знайти нижню ціну гри, верхню ціну гри, визначити сідлові точки, оптимальні чисті стратегії та ціну гри (якщо вони існують) для гри, яка задана матрицею:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -5 & 2 \\ -8 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 7.6. Знайти розв’язок гри, представленої в таблиці 7.7.

Таблиця 7.7.

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	2	4	1
A_2	3	4	1	5

Задача 7.7. Знайти розв'язок гри, представленої в таблиці 7.8.

Таблиця 7.8.

Платіжна матриця

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	6	8	1
A_2	3	0	4

Задача 7.8. Знайти розв'язок матричної гри графічним методом.

Таблиця 7.9.

Платіжна матриця

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	1	1	5
A_2	3	2	1
A_3	4	3	1

Задача 7.9. Знайти розв'язок матричної гри графічним методом:

Таблиця 7.10.

Платіжна матриця

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	7	2
A_2	2	3
A_3	0	5
A_4	-1	8

Задача 7.10. Знайти розв'язок матричної гри графічним методом:

Таблиця 7.11.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	3	8
A_2	4	7
A_3	5	1

Задача 7.11. Знайти розв'язок матричної гри графічним методом.

Таблиця 7.12.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	0	-4
A_2	-1	2
A_3	-2	3

Задача 7.12. Знайти розв'язок матричної гри графічним методом.

Таблиця 7.13.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	1	4
A_2	2	1	4	0

Задача 7.13. Перевірити чи стратегії $\bar{p}^0$ та $\bar{q}^0$ є оптимальними у грі з такою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \bar{p}^0 = (1/3, \quad 1/3, \quad 1/3); \\ \bar{q}^0 = (2/3, \quad 0, \quad 1/3); \end{matrix} \quad \gamma = 7.$$

Задача 7.14. Перевірити чи стратегії $\bar{p}^0$ та $\bar{q}^0$ є оптимальними у грі з такою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \bar{p}^0 = (1/2, \quad 1/2); \\ \bar{q}^0 = (1/3, \quad 1/3, \quad 1/3); \end{matrix} \qquad \gamma = 2.$$

Задача 7.15. Перевірити чи стратегії $\bar{p}^0$ та $\bar{q}^0$ є оптимальними у грі з такою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \bar{p}^0 = (3/5, \quad 2/5); \\ \bar{q}^0 = (4/5, \quad 0, \quad 1/5); \end{matrix} \qquad \gamma = 4{,}6.$$

Задача 7.16. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.14), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.14.

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	-4	2	4
A_2	4	6	-6	0
A_3	-2	4	-4	4
A_4	-2	-4	8	2

Задача 7.17. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.15), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.15.

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	0,5	5	5
A_2	0,1	0,1	0,01
A_3	1	0,1	1

Задача 7.18. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.16), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.16.

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	15	20	27	32
A_2	12	14	25	29	31
A_3	13	16	24	28	21
A_4	21	24	30	27	18
A_5	24	29	34	19	15
A_6	26	27	31	23	20

Задача 7.19. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.17), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.17.

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	7	3	1
A_2	2	8	3
A_3	-1	-2	6

Задача 7.20. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.18), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.18.

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-4	3	-4
A_2	-4	3	-6	-6
A_3	3	-6	5	4

Задача 7.21. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.19), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.19.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-7	2	-1	5
A_2	1	8	-7	2
A_3	5	4	2	-4

Задача 7.22. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.20), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.20.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	6	2
A_2	8	5	5	1
A_3	1	2	4	0
A_4	2	0	3	4

Задача 7.23. Звести гру, задану платіжною матрицею (табл. 7.21), до ЗЛП та знайти її розв'язок.

Таблиця 7.21.

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	3	1	0	7
A_2	-1	-2	0	5	4
A_3	3	4	5	2	-1

ТЕСТИ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. **Хто із вченич є основоположником теорії ігор?**
   1)Л. Канторович;
   2)Дж. фон Нейман;
   3)В. Лєонтьєв;
   4)Н. Віннер.

2. **У теорії ігор парна гра з нульовою сумою називається…**
   1) стратегічною;
   2) азартною;
   3) антагоністичною;
   4) біматричною.

3. **Якщо у гравця *A* є *m* можливих стратегій, а в супротивника *B* – *n* можливих стратегій, то платіжна матриця складається із:**
   1) m стовпців і n рядків;
   2) n стовпців і m рядків;
   3) n стовпців і n рядків;
   4) m стовпців і m рядків.

4. **У теорії ігор елемент платіжної матриці a_{ij} показує**…
   1) кількість ресурсу i-го, що йде на виробництво одиниці продукції j-го виду;
   2) вартість перевезення продукції від i-го постачальника до j-го споживача;
   3) виграш гравця A при власній стратегії A_i та стратегії супротивника B_j;
   4) кількість продукції, що вироблена у i-тій галузі і направляється в j-ту галузь.

5. **Верхня ціна гри обчислюється за формулою:**
   1) $\beta = \max_j \min_i a_{ij}$;
   2) $\beta = \max_i \min_j a_{ij}$;
   3) $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$;
   4) $\beta = \min_i \max_j a_{ij}$.

6. Виберіть правильне твердження щодо сідлової точки:

1) найменший з мінімальних виграшів гравця ***A*** точно дорівнює найбільшому з максимальних програшів гравця ***B***;

2) найбільший з максимальних виграшів гравця ***A*** точно дорівнює найменшому з мінімальних програшів гравця ***B***;

3) найбільший з мінімальних виграшів гравця ***A*** точно дорівнює найменшому з максимальних програшів гравця ***B***;

4) найменший з максимальних виграшів гравця ***A*** точно дорівнює найбільшому з мінімальних програшів гравця ***B***.

7. До умов застосування змішаних стратегій відносять:

1) гра без сідлової точки;

2) гра багаторазово повторюється у подібних умовах;

3) при кожному з ходів жоден гравець не інформований про вибір стратегії іншим гравцем;

4) всі відповіді правильні.

8. Розв'язком матричної гри є:

1) оптимальна стратегія гравця ***A***;

2) оптимальна стратегія гравця ***B***;

3) ціна гри;

4) всі відповіді правильні.

9. Для сідлової точки гри виконуються наступні рівності:

1) $\alpha = \beta$; $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$; $\beta = \max_j \min_i a_{ij}$;

2) $\alpha = \beta$; $\alpha = \min_i \min_j a_{ij}$; $\beta = \max_j \max_i a_{ij}$;

3) $\alpha = \beta$; $\alpha = \min_j \max_i a_{ij}$; $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$;

4) немає правильної відповіді.

10. Гра, зведена до задачі лінійного програмування, для гравця *A* матиме вигляд:

1) $$\begin{gathered} z = y_1 + y_2 + ... + y_m \to max; \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1, \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{2m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1, \\ y_j \ge 0, \ \left(i = \overline{1,n}\right). \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} z = y_1 + y_2 + ... + y_m \to min; \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \ge 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \ge 1, \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{2m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \ge 1, \\ y_j \ge 0, \ \left(i = \overline{1,n}\right). \end{gathered}$$

3) $$\begin{gathered} f = x_1 + x_2 + ... + x_m \to max; \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \le 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \le 1, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \le 1, \\ x_i \ge 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right). \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} f = x_1 + x_2 + ... + x_m \to min; \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge 1, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge 1, \\ x_i \ge 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right). \end{gathered}$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення понять: конфліктна ситуація, теорія ігор.
2. Дайте визначення понять: гра, гравець, виграш, нічия.
3. Дайте визначення понять: правила гри, партія гри, хід гри, особистий хід, випадковий хід.
4. Дайте визначення понять: скінченна гра, нескінченна гра, стратегія, оптимальна стратегія, азартна гра, стратегічна гра.
5. Дайте визначення понять: гра з нульовою сумою, парна гра, антагоністична гра.
6. Дайте визначення понять: нижня ціна гри, верхня ціна гри.
7. Дайте визначення понять: сідлова точка, чиста стратегія, змішана стратегія.
8. В чому суть „принципу мінімаксу”?
9. Назвіть основні складові конфлікту.
10. Яка мета та завдання теорії ігор?
11. Опишіть історію розвитку теорії ігор.
12. Хто із вчених отримав Нобелівську премію за дослідження конфліктних ситуацій та теорії ігор.
13. Дайте характеристику платіжної матриці.
14. Назвіть умови застосування змішаних стратегій.
15. Сформулюйте основні властивості оптимальних змішаних стратегій.
16. Сформулюйте та доведіть теорему про необхідні і достатні умови оптимальності змішаних стратегій.
17. Сформулюйте та доведіть теорему активні стратегії учасника гри.
18. Сформулюйте та доведіть теорему зв’язок між оптимальними стратегіями, ціною гри матриць $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ та $\|ba_{ij}+c\|_{m\times n}$ $(b>0)$.
19. Які стратегії називаються домінуючими для гравця ***A***?
20. Які стратегії називаються домінуючими для гравця ***B***?
21. Які стратегії називаються дублюючими?
22. Що таке операція мажоруання?
23. Сформулюйте алгоритм розв’язку матричної гри типу ***2xn*** графічним методом.
24. Сформулюйте алгоритм розв’язку матричної гри типу ***mx2*** графічним методом.
25. Які стратегії називаються змішаними?
26. Що таке оптимальні змішані стратегії матричної гри.
27. Вкажіть методи знаходження оптимальних змішаних стратегій.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акимов В.П. Основы теории игр / В.П. Акимов – М. : МГИМО, 2008. – 156 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці. Навч. пос. / О.В. Боровик, Л.В. Боровик – К. : ЦУЛ, 2007. – 424 с.
3. Воробьев Н.Н. Основы теории игр: Бескоалиционные игры / Н.Н. Воробьев – М. : Наука. 1984. – 497 с.
4. Воробьев Н.Н. Теория игр: для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьев – М. : Наука, 1985. – 272 с.
5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Ю.П. Зайченко – Київ : ЗАТ “Віпол”, 2000. – 688 с.
6. Исследование операций в экономике: Учебное пособие / Под ред. Н.Ш. Кремера – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001. – 407 с.
7. Исследование операций: в 2 т. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – Т. 1: Методологические основы и математические методы. – 1981. – 716 с.
8. Карагодова О.О. Дослідження операцій: Навч. пос. / О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок – К. : ЦУЛ, 2007. – 256 с.
9. Катренко А.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник / А.В. Катренко – Львів : “Магнолія-2006”, 2007. – 480 с.
10. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник / В.Я. Кутковецький – Київ : Вид-во ТОВ “Видавничий дім “Професіонал”, 2004. – 350с.
11. Математичні моделі в менеджменті та маркетингу: Навч. посібник / [С.К. Рамазанов, Н.О. Рязанцева, Т.В. Ляшенко та ін.] – Луганськ : СПД Резніков В.С., 2010. – 311 с.
12. Мулен, Эрве. Теория игр с примерами из математической экономики / Эрве Мулен – М. : Мир, 1985. – 192 с.
13. Негрей М.В. Дослідження операцій. Частина І: навч.-метод. посібник / М. В. Негрей, З. Б. Артим-Дрогомирецька, / Львів: вид-во «Край», 2014. – 312 с.
14. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций / Хэмди А. Таха – М. : Мир, 2005. – 912с.
15. Шиян А.А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті. Навчальний посібник / А.А. Шиян. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 164 с.

ТЕМА 8

АКТУАЛЬНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ І ПОНЯТТЯ

В сучасному суспільстві постійно виникають нові практичні проблеми, для вирішення яких розробляють нові та удосконалюють існуючі методи та моделі. Розвиток комп'ютерних технологій також відіграє важливу роль у застосуванні оптимізаційних методів та моделей в економіці. В межах одного навчального посібника чи однієї навчальної дисципліни важко охопити всі існуючі чи навіть всі поширені і часто застосовувані методи та моделі прийняття рішень. Даний розділ присвячено актуальним методам і моделям, які є досить простими для розуміння, мають широке поширення та практичне застосування в системах різного рівня.

Сутність динамічного програмування. Принцип оптимальності

Усі процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі. Деякі задачі дослідження операцій мають специфічні особливості, які дозволяють звести їх розв'язок до розгляду деякої множини більш простих підзадач. В результаті задача глобальної оптимізації деякої функції зводиться до поетапної оптимізації деяких проміжних цільових функцій. У динамічному програмуванні розглядаються методи, що дозволяють шляхом поетапної багатокрокової оптимізації отримати загальний (результуючий) оптимум. Як науковий напрямок динамічне програмування виникло у 1951-1953 рр. завдяки дослідженням Р. Беллмана та його співробітників.

Економічний процес є керованим, якщо можна впливати на хід його розвитку. Під управлінням розуміють сукупність рішень, які приймаються на кожному етапі для впливу на хід розвитку процесу. Керовані процеси в економіці – це випуск продукції підприємством, забезпечення підприємства сировиною, заміна обладнання і т.д.

Для того, щоб можна було застосувати методи динамічного програмування до задач дослідження операцій, вони повинні відповідати наступним вимогам:

– об’єктом дослідження повинна бути керована система із заданими допустимими станами і допустимими управліннями;
– постановка задачі повинна давати можливість інтерпретації як багатокрокового процесу, кожний крок якого складається із прийняття рішень про вибір одного із допустимих управлінь, що призводять до зміни стану системи;
– задача не повинна залежати від кількості кроків і повинна бути визначеною на кожному з них;
– стан системи на кожному кроці повинен описуватися однаковим (за складом) набором параметрів;
– наступний стан, в якому буде перебувати система після вибору рішення на k-му кроці, залежить тільки від даного рішення і стану системи на початок k-го кроку. Ця властивість є основною у динамічному програмуванні і називається *відсутністю післядії*.

Розглянемо загальну задачу управління деяким *об’єктом*, який може перебувати у різних *станах*. Поточний стан об’єкту ототожнюється з деяким набором параметрів, які позначатимемо ξ і називатимемо *вектором стану*. Нехай задана множина Ξ всіх можливих станів. Для об’єкта визначена також множина *допустимих управлінь* (керуючих впливів) X, які вважатимемо числовою множиною. Керуючі впливи можуть здійснюватися в дискретні моменти k $(k \in 1:n)$, при чому управлінське *рішення* полягає у виборі одного з управлінь $x_k \in X$. *Планом* задачі або *стратегією управління* називають вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, компонентами якого є управління, вибрані на кожному кроці процесу. Оскільки передбачено, що система володіє властивістю відсутності післядії між кожними двома послідовними станами об’єкта ξ_k та ξ_{k+1} існує відома функціональна залежність, що включає і вибране управління $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi_k)$, $k \in 1:(n-1)$. Тим самим задаючи початковий стан об’єкта $\xi_1 \in \Xi$ і вибираючи план x однозначно визначають *траєкторію поведінки* об’єкта (рис. 8.1).

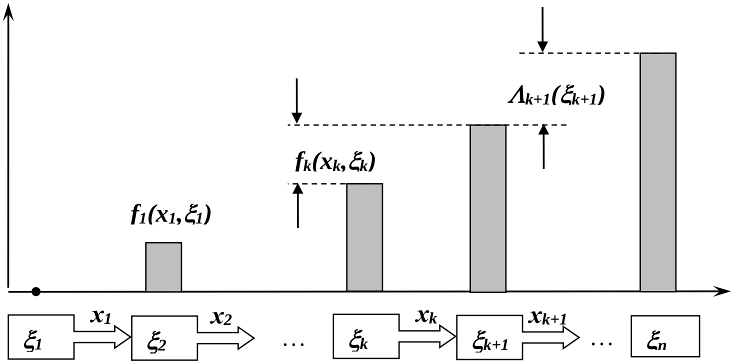


Рис. 8.1. Визначення траєкторії поведінки об'єкта

Ефективність управління на кожному кроці $\boldsymbol{k}$ залежить від поточного стану ξ_k, вибраного управління x_k і кількісно оцінюється за допомогою функцій $f_k(x_k,\xi_k)$, які є складовими адитивної цільової функції, що характеризує загальну ефективність управління об'єктом. У визначення функції $f_k(x_k,\xi_k)$ зазвичай включають область допустимих значень x_k, яка, як правило, залежить від поточного стану ξ_k. За заданого початкового стану ξ_1 *оптимальне управління* зводиться до вибору такого оптимального плану x^*, при якому досягається максимум суми значень на відповідній траєкторії.

Основний принцип динамічного програмування полягає в тому, що на кожному кроці потрібно оптимізувати не ізольовану функцію $f_k(x_k,\xi_k)$, а вибирати оптимальне управління x^*, вважаючи оптимальними всі наступні кроки. Формально даний принцип реалізується шляхом відшукання на кожному кроці $\boldsymbol{k}$ *умовних оптимальних* управлінь $\hat{x}_k(\xi)$, $\xi_1 \in \Xi$, що забезпечують найбільшу сумарні ефективність починаючи з цього кроку, вважаючи, що поточним є стан ξ.

Позначимо $\Lambda_k(\xi)$ максимальне значення суми функцій f_k упродовж від $\boldsymbol{k}$ до $\boldsymbol{n}$ кроків (яке отримують при оптимальному управлінні на даному відрізку процесу), при умові, що об'єкт на початку кроку $\boldsymbol{k}$ перебуває у стані ξ. Тоді функції $\Lambda_k(\xi)$ повинні задовольняти рекурентні співвідношення:

$$\Lambda_k(\xi_k) = \max_{x_k}\left\{ f_k(x_k,\xi) + \Lambda_{k+1}(\xi_{k+1}) \right\},\ k \in 1:(n-1) \qquad (8.1)$$

де $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi)$.

Співвідношення (8.1) називають *основним рекурентним співвідношенням* динамічного програмування. Воно реалізує базовий принцип динамічного програмування, який названо *принцип оптимальності Беллмана*: яким би не був стан системи ξ_k на k –му кроці і вибране на ньому управління, наступні управління повинні бути оптимальними по відношенню до стану $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi)$, який отриманий в результаті рішення, прийнятого на кроці k.

Основне співвідношення (8.1) дозволяє знайти функції $\Lambda_k(\xi)$ тільки у відповідності із початковою умовою, якою в даному випадку є рівність

$$\Lambda_n(\xi) = \max_{x_n}\{f_n(x_n, \xi)\}. \qquad (8.2)$$

Залежно від того, який стан системи задається (початковий чи кінцевий), формула (8.2) може набувати такого вигляду:

$$\Lambda_1(\xi) = \max_{x_1}\{f_1(x_1, \xi)\}. \qquad (8.2)$$

При використанні алгоритмів динамічного програмування, якщо заданий початковий стан системи, то задача розв’язується у зворотному напрямку, а якщо кінцевий, то – в прямому. Якщо задані і початковий, і кінцевий стани, то задача суттєво ускладнюється.

Алгоритм розв’язування задач динамічного програмування

1. Специфікація стану заданої керованої системи та множини параметрів, що описують цей стан. Стан системи обирають таким чином, щоб допустимий розв’язок задачі в цілому можна було знайти як результат оптимізації на кожному кроці окремо. На цьому етапі необхідно забезпечити зв’язок між послідовними етапами перебігу процесу.

2. Розбиття динамічного процесу на кроки, що відповідають, як правило, часовим періодам процесу або окремим об’єктам (підприємствам, видам продукції, устаткування і т. ін.), стосовно яких розробляються управлінські рішення.

3. Визначення переліку управлінських рішень x_k, $x_k \in X$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначення ефекту, що його забезпечує управлінське рішення x_k на k-му кроці, якщо перед тим система була у стані ξ_{k-1}, як функцію ефективності:

$$max\ f_k(x_k,\xi_k). \tag{8.3}$$

5. Дослідження, як змінюється стан ξ_{k+1} системи під впливом управлінського x_k на k -му кроці, переходячи до нового стану:

$$\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k,\xi). \tag{8.4}$$

6. Побудова рекурентних співвідношень, що визначають умовний оптимальний ефект $\Lambda_k(\xi_k)$, починаючи з k-го кроку і до останнього, через вже відому функцію $\Lambda_{k+1}(\xi_{k+1})$:

$$\Lambda_k(\xi_k) = \max_{x_k}\{f_k(x_k,\xi) + \Lambda_{k+1}(\xi_{k+1})\} \tag{8.5}$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на i-му кроці $f_k(x_k,\xi)$.

7. Умовна оптимізація останнього n-го кроку, розглядаючи множину станів ξ, що на один крок віддалені від кінцевого стану, і визначення умовного оптимального ефекту на n-му кроці:

$$\Lambda_n(\xi) = \max_{x_n}\{f_n(x_n,\xi)\}. \tag{8.6}$$

Визначення умовного оптимального управлінського рішення x_n, завдяки якому цей максимум досягається.

8. Умовна оптимізація $(n-1)$-го, $(n-2)$-го і т. д., тобто всіх попередніх кроків за рекурентними співвідношеннями п. 6, і для кожного кроку відшукання умовного оптимального управління x_k.

9. Проведення безумовної оптимізації управління від початкового стану до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці $x_1^* = x_1(\xi_1)$ змінюють стан системи згідно з п. 5. Для отриманого нового стану знаходять оптимальне управління на другому кроці x_2^* і продовжують так до останнього кроку.

В результаті знаходять оптимальне покрокове управління $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)$, що забезпечує максимальну ефективність $\Lambda_k(\xi)$.

Задача оптимального управління інвестиціями

Розглянемо задачу оптимального управління інвестиціями**,** які можуть бути використані двома способами: з метою розвитку рослинництва або тваринництва. Відомо, що за першого способу отримаємо прибуток $g(x)$, а за другого – $h(y)$.

Тоді однокрокову задачу можна подати у вигляді:

$$f = g(x) + h(y) \to max \tag{8.7}$$

за умов

$$x + y = b,$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

Нехай

$$f = f_1, \; b = b_1, \; x = x_1, \; y = b_1 - x_1. \tag{8.8}$$

Тоді дану задачу можна записати так:

$$f = g(x) + h(b_1 - x_1) \to max. \tag{8.9}$$

Розглянемо її як задачу оптимального управління інвестиціями за окремими інтервалами планового періоду T, маючи на меті розподілити залишок інвестицій на кінець k-го інтервалу (k=**1, 2, …,** n) двома зазначеними способами. При цьому критерій оптимізації не змінюється: максимізація обсягу прибутку за весь плановий період T.

Якщо на першому інтервалі використано b_1 інвестицій, то на його кінець залишилося їх:

$$b_2 = cx_1 + d(b_1 - x_1), \tag{8.10}$$

де c**,** d – коефіцієнти пропорційності, що характеризують використання інвестицій рослинництвом і тваринництвом:

$$\frac{x}{b_1 - x_1} = \frac{c}{d}. \tag{8.11}$$

Задачу для другого інтервалу подамо так:

$$f_2 = [g(x_2) + h(b_2 - x_2)] \to max \tag{8.12}$$

за умов

$$0 \le x_2 \le b_2.$$

Звідси для будь-якого k-го інтервалу маємо:

$$f_k = [g(x_k) + h(b_k - x_k)] \to max \tag{8.13}$$

за умов

$$0 \le x_k \le b_k.$$

Загальна задача набирає вигляду:

$$f = f_1 + f_2 + ... + f_n = \sum_{k=1}^{n}\left[g(x_k) + h(b_k - x_k)\right] \to max \qquad (8.14)$$

за умов $0 \le x_k \le b_k \ \left(k = \overline{1,n}\right)$,

$$b_k = cx_{k-1} + d\left(b_{k-1} - x_{k-1}\right),\ \left(k = \overline{1,n}\right). \qquad (8.15)$$

В термінах динамічного програмування параметри задачі оптимального управління інвестиціями інтерпретують наступним чином:

1. *Крок* k – це порядковий номер року $k \ (k = \overline{1,n})$.
2. Варіантами *управлінського рішення* на k-му кроці (для k-го року) є суми інвестицій x_k та $b_k – x_k$ відповідно.
3. *Станом* на k-му кроці є сума коштів на початок k-го року, які можна інвестувати.

Задача про розподіл капіталовкладень між підприємствами

Розглянемо задачу оптимального розподілу капіталовкладень між n підприємствами. Планується розподіл початкової суми M між n підприємствами. Передбачають, що капіталовкладення в розмірі x_k приносить дохід (прибуток, приріст продукції) в розмірі $\varphi_k(x_k)$.

При побудові задачі вважають, що дохід, отриманий від різних підприємств, виражається в однакових одиницях (грн, євро, одиниці продукції тощо); дохід, отриманий від капіталовкладень в підприємтсво, не залежить від капіталовкладень в інші підприємства; загальний дохід дорівнює сумі доходів, отриманих від всіх капіталовкладень у всі підприємства.

Задача полягає у визначенні величини капіталовкладень у кожне підприємство, які максимізують сумарний дохід призаданих функціях доходу кожного підприємства.

Рекурентні співвідношення в загальному вигляді записують наступним чином:

$$f_n(M) = \max_{x_n = 0,M}\left\{\varphi_n(x_n) + f_{n-1}(M - x_n)\right\}. \qquad (8.16)$$

В термінах динамічного програмування параметри задачі оптимального розподілу капіталовкладень між n підприємствами інтерпретують наступним чином:

1. *Крок* k – це порядковий номер підприємства $k \ (k = \overline{1,n})$.

2. Варіантами *управлінського рішення* на k-му кроці (для k-го року) є величина капіталовкладень у k-те підприємство.

3. *Станом* на k-му кроці є сума коштів, які можна інвестувати у k-те підприємство.

Задача про завантаження

Туристу потрібно завантажити свій наплічник певною кількістю предметів, серед яких можуть бути й однакові предмети. За наявності певної кількості обмежень, як вага, об’єм, лінійні розміри і корисність кожного предмета, потрібно розмістити їх в наплічник заданої місткості таким чином, щоб загальна корисність вмістимого була якнайбільшою. Така задача – класична задача про рюкзак (наплічник, ранець), або задача про завантаження, яка може застосовуватися і для оптимального завантаження транспортних засобів, складів тощо.

В математичній постановці задача про завантаження набуде такого вигляду: транспортний засіб (наплічник) вантажопідйомністю W завантажується предметами n різних типів вагою w_j вартістю c_j, $j=\overline{1,n}$. Визначити, яку кількість предметів j-го типу потрібно завантажують на транспортний засіб (у ранець), щоб забезпечити максимальну вартість вантажу, вага якого не більше W.

Тоді математична модель матиме вигляд:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le W, \tag{8.17}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},$$

$$x_j - цілі.$$

Стан транспортного засобу (наплічника) ξ_j на j-му етапі визначається з обмеження моделі:

$$\xi_j=\sum_{i=1}^{j} w_i x_i,\ \ j=\overline{1,n};\ \ 0\le \xi_j \le W;\ \xi_n=W. \tag{8.18}$$

Ціль управління на етапі $z_j=c_j x_j,\ \ j=\overline{1,n}.$

Варіанти розв'язку x_j етапу j описуються кількістю предмету типу j: $x_j = 0,1,2,\ldots,\lfloor W / w_j \rfloor$ – цілі.

Нехай $f_j(\xi_j)$ – значення цільової функції, що відображає вартість предметів, включених на етапах j, $j=\overline{1,n}$ при заданому стані системи ξ_j.

$$f_j(\xi_j) = \max_{x_j = 0,1,\ldots,\left[\frac{W}{w_j}\right]} \left\{ c_j x_j + f_{j+1}(\xi_j - w_j x_j) \right\},\ j = \overline{1,n};$$

$$\xi_j = 0,\ldots,W; \tag{8.19}$$

$$\xi_j \geq w_j x_j.$$

В термінах динамічного програмування параметри задачі оптимального управління інвестиціями інтерпретують наступним чином:

1. *Крок* k – це порядковий номер предмета k $(k = \overline{1,n})$.
2. Варіантами *управлінського рішення* на k-му кроці (для k-го предмета) є кількість завантажених k-х предметів.
3. *Станом* на k-му кроці є вага транспортного засобу (наплічника).

Задача про заміну обладнання

Задача полягає у визначенні оптимальних термінів заміни старого обладнання (виробничих ліній, устаткування, станків і т.д.) на нове. Старіння обладнання включає його фізичний і моральний знос, в результаті чого зростають витрати на ремонт і обслуговування, знижується продуктивність праці, зменшується залишкова вартість. Настає момент, коли старе обладнання вигідніше продати і замінити новим, ніж експлуатувати ціною великих витрат. Критерієм оптимізації задачі про заміну обладнання може бути максимальний прибуток від експлуатації обладнання або мінімальні сумарні витрати на його експлуатацію.

Вік обладнання t розраховуватимемо в напрямку проходження процесу (рис. 8.2). При $t=0$ маємо випадок використання нового обладнання. Тривалість процесу дорівнює n років.

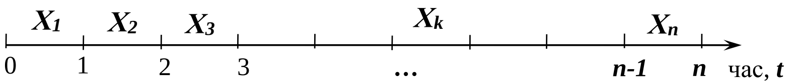


Рис. 8.2. Процес заміни обладнання.

На рис. 8.2 представлені довільні управління X_k на k-му кроці і оптимальному управлінні на наступних $n\!-\!k$ кроках.

Параметром стану системи є вік обладнання, тобто $s_{k-1}=t$. Для нового обладнання на початку першого року експлуатації $s_0=0$. Управління на кожному кроці визначається двома змінними $X_k=X_з$ (зберегти) та $X_k=X_o$ (оновити). Тоді

$$s_k=\varphi_k(s_{k-1},X_k)=\left\{\begin{matrix} t+1,\ якщо\ X_k=X_з \\ 1,\ якщо\ X_k=X_o \end{matrix}\right\}=k=1,2,3,4,5. \qquad (8.20)$$

Якщо обладнання оновлюють, то на початок k-го кроку його вік буде дорівнювати нулю, а після року експлуатації $t=1$, тобто $s_k=1$.

Показник ефективності k-го кроку:

$$f_k(s_k,X_k)=\begin{cases} f_k^з(s_k,X_k),\ якщо\ X_k=X_з, \\ f_k^o(s_k,X_k),\ якщо\ X_k=X_o, \end{cases} \qquad (8.21)$$

де $f_k^з(s_k,X_k)$ – функція витрат на утримання обладнання (випадок збереження обладнання і подальша його експлуатація), $f_k^o(s_k,X_k)$ – функція витрат на оновлення обладнання.

Запишемо рекурентне співвідношення:

$$F_k^*(s_{k-1})=\begin{cases} f_k^o(s_k,X_k)+F_{k+1}^*(t+1),\ якщо\ X_k=X_з, \\ f_k^o(s_k,X_k)+F_{k+1}^*(1),\ якщо\ X_k=X_o, \end{cases} \qquad (8.22)$$

де $s_k=t+1$. У другому рівнянні аргументом умовного максимуму цільової функції є одиниця, оскільки вік обладнання після заміни в кінці року дорівнює одиниці.

В термінах динамічного програмування параметри задачі заміни обладнання інтерпретують наступним чином:

1. *Крок* k – це порядковий номер року k $(k=\overline{1,n})$.

2. Варіантами *управлінського рішення* на $\boldsymbol{k}$-му кроці (для $\boldsymbol{k}$-го року) є дві альтернативи: продовжити експлуатацію або замінити обладнання на початку $\boldsymbol{k}$-го року.

3. *Станом* на $\boldsymbol{k}$-му кроці є вік обладнання $\boldsymbol{t}$ (термін експлуатації) на початок $\boldsymbol{k}$-го року.

Задача оптимального управління поставками

В різних областях підприємництва виникає задача вибору моменту подачі партії поставки і її обсягу. З розміщенням замовлень пов'язані деякі фіксовані затрати $\boldsymbol{K}$, які не залежать від величини партії, що замовляється, а залежать лише від факту замовлення. Із зберіганням матеріальних ресурсів пов'язані витрати, які пропорційні залишку нереалізованої продукції на кінець інтервалу. Нехай $\boldsymbol{T\ (t=\overline{1,T})}$ - період планування. Позначимо через $\boldsymbol{v_t}$ величину інтенсивності споживання на $\boldsymbol{t}$-му інтервалі. Стан системи будемо описувати величиною залишку нереалізованої продукції на кінець інтервалу $\boldsymbol{X=(x_1,x_2,...,x_n)}$. Початковий $\boldsymbol{x_0}$ та кінцевий $\boldsymbol{x_T}$ стани системи можуть бути заданими. Для безперебійності споживання поставками потрібно управляти. Позначимо через $\boldsymbol{U=(u_1,u_2,...,u_n)}$ вектор управління. Його координати – величина поставок на початку відповідних інтервалів. З множини можливих управлінь необхідно вибрати таке, при якому досягається мінімум на замовлення і утримання матеріальних ресурсів. Позначимо через s граничні витрати зберігання одиниці продукції протягом інтервалу. Функція мети при цьому має вигляд:

$$\boldsymbol{f=\sum_{t=1}^{T}\left(K\delta_t+sx_t\right)\to min} \qquad (8.23)$$

де $\boldsymbol{\delta_t}$ – булева змінна.

$$\boldsymbol{\delta_t=\begin{cases}1,\ u_t>0,\\ 0,\ u_t=0.\end{cases}} \qquad (8.24)$$

Стан системи запишеться співвідношенням:

$$\boldsymbol{x_t=x_{t-1}+u_t-v_t,\quad t=\overline{1,T}}. \qquad (8.25)$$

На стан системи може бути накладене обмеження, пов'язане з надійністю постачання: $x_t \geq \overset{0}{x}_t$, де $\overset{0}{x}_t$ – величина деякого страхового рівня, який гарантує із заданою надійністю від непередбачених збоїв в системі. Об'єднання обмежень, які накладаються на стан системи $\boldsymbol{X}$ і вектор управління $\boldsymbol{U}$, позначимо через $\boldsymbol{\Omega}$.

Отримаємо задачу:

$$f = \sum_{t=1}^{T} \left(K\delta_t + sx_t \right) \to min \qquad (8.26)$$
$$U \in \Omega.$$

В термінах динамічного програмування параметри задачі оптимального управління запасами інтерпретують наступним чином:

1. *Крок* $\boldsymbol{k}$ – це порядковий номер інтервалу t($t = \overline{1,T}$).

2. Варіантами *управлінського рішення* на $\boldsymbol{k}$-му кроці (для $\boldsymbol{t}$-го інтервалу) є $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ величина поставок на початку відповідних інтервалів.

3. *Станом* на $\boldsymbol{k}$-му кроці є величина залишку нереалізованої продукції $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на кінець $\boldsymbol{k}$-го кроку.

Основні поняття управління запасами

Кожне промислове підприємство для успішного і своєчасного виконання поставленого завдання повинно мати запаси різних видів сировини, палива, матеріалів тощо. Обсяги цих запасів у процесі виробництва не залишаються постійними, а весь час коливаються від мінімального до максимального значення.

Обсяг виробничих запасів різних видів ресурсів залежить від дії багатьох факторів, що мають протилежну спрямованість. Одні фактори сприяють збільшенню запасів, інші – навпаки, їх зменшенню. Саме тому величина запасів може суттєво впливати на різноманітні техніко-економічні показники діяльності підприємств. Так, зростання запасів скорочує транспортні витрати з поставок певного виду ресурсів, але збільшує витрати на його зберігання, потребує більших складських приміщень, збільшує потребу підприємства в обігових коштах. Однак головним є те, що зростання запасів сприяє більш ритмічній роботі підприємства, зменшує вірогідність зриву виконання виробничого завдання через незадовільну матеріально-технічну базу.

В теорії управління запасами розглядається проміжок часу 1 рік. Розглядається модель одиничного складу. Вважається, що на складі зберігається запас однотипної продукції (однономенклатурний запас). Попит на цю продукцію може бути постійним або випадковим. Поповнюватися склад може або періодично (циклічна модель), або при зниженні запасів до деякого рівня (рівнева модель).

Обсяг замовлення – це кількість продукції, що замовляється.

Рівень повторного замовлення – кількість продукції на складі, при якій подається замовлення на нову продукцію.

Час поставки може бути або миттєвим, або фіксованим, або випадковим.

Штраф за *дефіцит* – це збитки, пов’язані з відсутністю запасу.

За зберігання кожної одиниці запасу береться певна плата ***s***.

d – річний попит на продукцію.

Вартість доставки партії замовлення C_d – це накладні витрати, пов’язані з реалізацією доходу, реалізацією замовлення (витрати на підготовчо-заготівельні операції, які не залежать від обсягу замовлення).

Вся теорія управління запасами будується з метою мінімізації сумарних витрат.

Задача управління запасами полягає у знаходженні оптимальної величини виробничого запасу певного ресурсу, досягнення якої забезпечує найкращі сумарні техніко-економічні показники діяльності підприємства (рис.8.3).

На рисунку наведено окремі складові витрат, величина яких залежить від розміру запасів певного конкретного ресурсу. Крива ***1*** відображає ті витрати, що зі збільшенням запасів спочатку скорочуються, а потім починають зростати. Точка ***q*** характеризує оптимальну величину запасів, за якої сумарні витрати, пов’язані з доставкою та зберіганням запасів, виявляються мінімальними. Для знаходження цієї точки користуються методом моделювання.

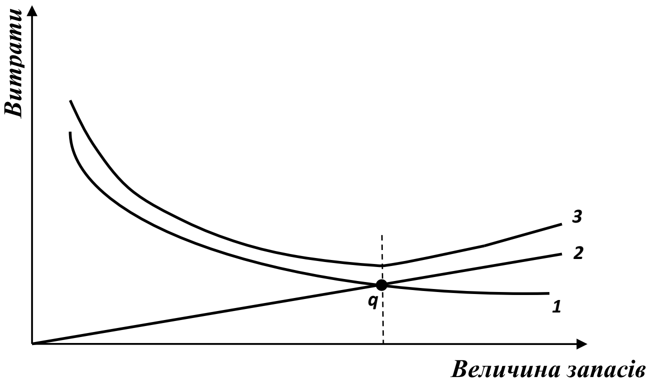


Рис.8.3. Залежність витрат від величини запасів виробництва

Усі виробничі запаси на підприємстві зазвичай поділяють на поточні, страхові, підготовчі та сезонні. Останні два види запасів не потребують оптимізації. Вони мають нормативний характер і залежать від конкретних умов виробництва. Тому задача зводиться до знаходження величини поточного і страхового запасів. На рис.8.4 показано характер поточного запасу. Виходячи з того, що створення кожного виду запасу має свою мету, їхню оптимізацію кожного з них треба проводити окремо.

Поточний запас призначений для задоволення потреб процесу виробництва у необхідних видах сировини, матеріалів, палива. З цього запасу цехи і дільниці підприємства щоденно беруть ресурси, що ними споживаються.

Величина поточного запасу залежить від розміру партії поставки та добового споживання певного ресурсу, а отже, від періоду поставки.

Модель оптимізації страхового запасу розробляють на підприємстві для того, щоб убезпечити можливу зупинку виробничого процесу або попередити нераціональні витрати, пов’язані з недотриманням терміну чергової поставки партії конкретного ресурсу. Якщо встановлений термін буде порушено і чергова партія надійде на підприємство раніше призначеної дати, то цехи та ділянки працюватимуть за рахунок страхового запасу.

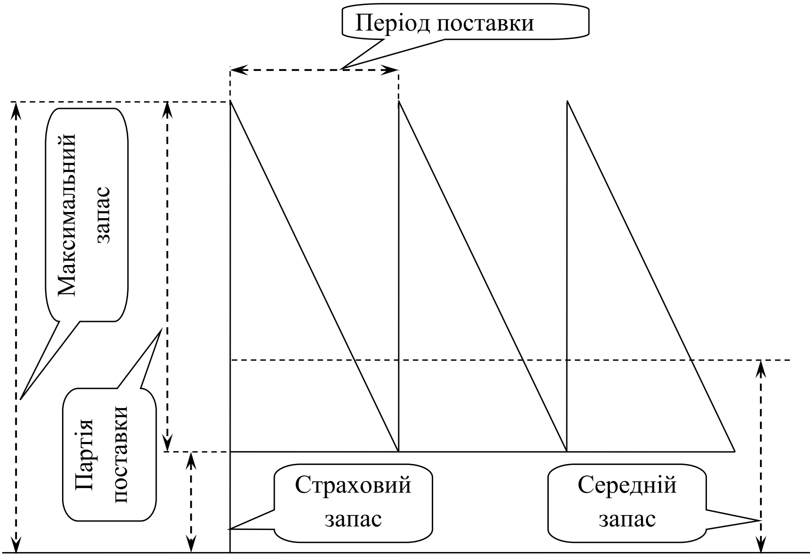


Рис. 8.4. Схема зміни поточного запасу

Основна модель управління запасами

Припущення основної моделі:

1) Попит на продукцію є рівномірним і постійним.
2) Час поставки постійний.
3) Відсутність замовлень недопустима.
4) Кожного разу замовляється постійна кількість – оптимальний розмір замовлення.

Витрати на управління запасами:

L = вартість доставки товарів + вартість зберігання

$$L = \frac{C_d d}{q} + \frac{sq}{2} \to min, \qquad (8.27)$$

де q – оптимальний розмір замовлення;

$q/2$ – середній обсяг запасу, що зберігається.

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{C_d d}{q^2} + \frac{s}{2} = 0,$$

$$\frac{C_d d}{q^2} = \frac{s}{2},$$

$$q = \sqrt{\frac{2C_d d}{s}}. \qquad (8.28)$$

Модель економічного розміру партії

Технологічний процес може бути організований на основі виробництва партії продукції: чергування процесів виробництва і реалізації виготовленої продукції.

Яким повинен бути розмір партії продукції q?

Позначимо через C_v – вартість організації виробничого циклу (фіксовані витрати виробництва).

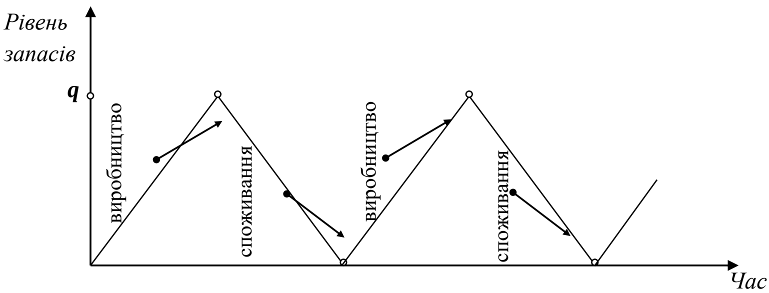


Рис. 8.5. Модель економічного розміру партії

L= вартість організації виробничого циклу + вартість зберігання

$$L = \frac{C_v d}{q} + \frac{sq}{2} \to min, \qquad (8.29)$$

де q – економічний розмір замовлення.

Шуканий розмір партії становитиме

$$q = \sqrt{\frac{2C_v d}{s}}. \qquad (8.30)$$

Знижка на кількість

Дуже часто, якщо кількість замовленого товару більша, ніж певне число, надається знижка. В цьому випадку знижуються витрати на закупівлю, але збільшуються витрати на зберігання.

Загальні витрати:

L*= *вартість закупки* + *вартість зберігання

$$L = C_z d + \frac{C_v d}{q} + \frac{sq}{2} \to min\,, \tag{8.31}$$

де C_z – закупівельна ціна;

Необхідно визначити, чи варто користуватися знижкою.

Модель виробництва партії продукції

Попередньо розглядалася модель економічного розміру партії (спочатку продукцію виробляють, потім використовують і т.д.). Розглянемо випадок, коли продукція використовується в міру її виробництва.

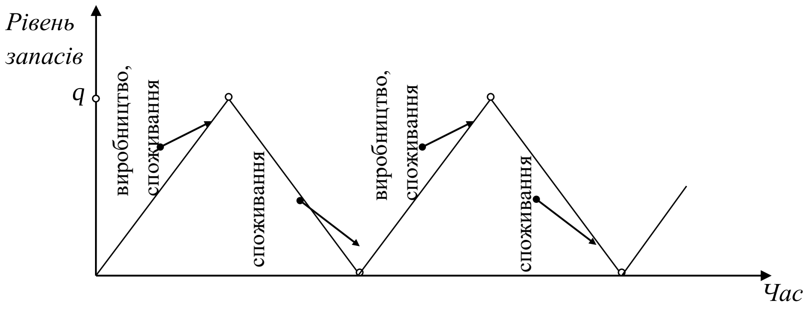


Рис. 8.6. Модель виробництва партії продукції

Нехай ***p*** – темп виробництва, ***k*** – темп споживання. Виготовивши ***q*** одиниць продукції, виробництво зупиняють. Оскільки починають використовувати виготовлену продукцію одразу ж, не чекаючи зупинки виробництва, то в момент цієї зупинки на складі буде не ***q*** одиниць, а менше.

L= вартість організації технологічного процесу + вартість зберігання

$$\boldsymbol{L = \frac{C_v d}{q} + \frac{s(p-k)q}{2p} \rightarrow min} \qquad (8.32)$$

де $\boldsymbol{q}$ – економічний розмір замовлення.

Шуканий розмір партії становитиме

$$\boldsymbol{q = \sqrt{\frac{2C_v d}{s}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p-d}}}\ . \qquad (8.33)$$

Випадок невиконання замовлення

$\boldsymbol{b}$ – максимальний розмір дефіциту (максимально можлива кількість одиниць продукції, яка могла б бути реалізована за час її відсутності в кожному циклі).

На графіку періоди дефіциту умовно відображаються нижче осі часу.

$\boldsymbol{C_b}$ – річна вартість відсутності одиниці продукції в запасі (втрата довіри клієнтів, непродана продукція і т.д.).

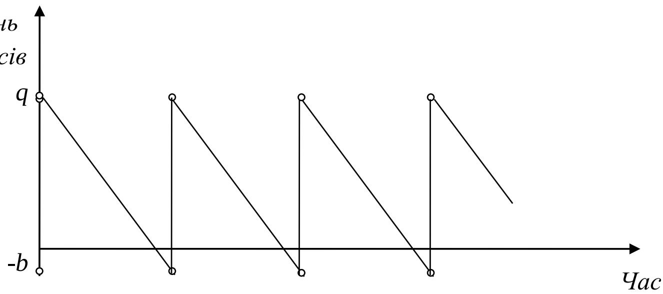


Рис. 8.7. Випадок невиконання замовлення

При використанні моделей управління запасами витрати, зумовлені дефіцитом, обчислити досить важко.

L = вартість доставки товарів + вартість зберігання+ + штраф за дефіцит

$$L = \frac{C_d d}{q+b} + \frac{sq}{2(q+b)} + \frac{C_b b^2}{2(q+b)} \to min \qquad (8.34)$$

де q – оптимальний розмір замовлення;

b – максимальний розмір дефіциту.

Шуканий розмір партії становитиме:

$$q = \sqrt{\frac{2C_d d}{s}} \cdot \sqrt{\frac{C_b}{s+C_b}}. \qquad (8.35)$$

$$b = \sqrt{\frac{2C_d d}{C_b}} \cdot \sqrt{\frac{s}{s+C_b}} \qquad (8.36)$$

Випадок виконання замовлення

У випадку виконання заявок максимальний рівень запасів буде дорівнювати не q, а $(q-b)$.

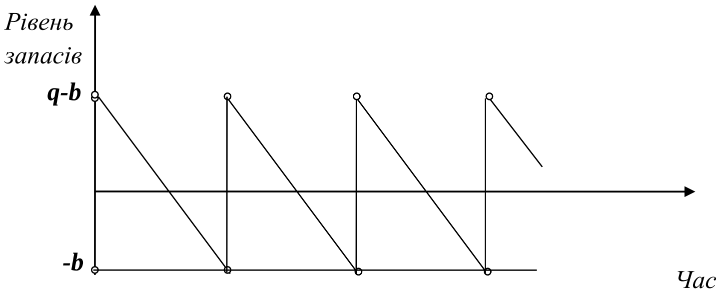


Рис. 8.8. Випадок виконання замовлення

L = вартість доставки товарів + вартість зберігання + штраф за дефіцит

$$L = \frac{C_d d}{q} + \frac{s(q-b)^2}{2q} + \frac{C_b b^2}{2q} \to min \qquad (8.37)$$

де q – оптимальний розмір замовлення;

b – максимальний розмір дефіциту.

Шуканий розмір партії становитиме:

$$q=\sqrt{\frac{2C_d d}{s}}\cdot\sqrt{\frac{s+C_b}{C_b}} \tag{8.38}$$

$$b=\sqrt{\frac{2C_d d}{C_b}}\cdot\sqrt{\frac{s}{s+C_b}}\,. \tag{8.39}$$

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 8.1. У табл. 8.1 відображено можливі прирости випуску продукції на чотирьох фірмах у випадку додаткових капіталовкладень на їхню реконструкцію і модернізацію. Потрібно так розподілити ***200*** тис. грн. між чотирма фірмами, щоб одержати максимальний загальний приріст випуску продукції.

Таблиця 8.1

Капіталовкладення, тис. грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***			
	I	***II***	***III***	***IV***
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Розв'яання:

Нехай $f_4(200)$ – максимальний приріст випуску продукції від чотирьох фірм за умови, що розподіляємо між ними ***200*** тис. грн,

$$f_4(200) = \max_{\substack{x_4=0,50,100,\\150,200}} \left\{ \varphi_4(x_4) + f_3(200 - x_4) \right\}.$$

Функції f_3, f_2, f_1 знайдемо за рекурентними співвідношеннями

$$f_n(K) = \max_{x_n=0,K} \left\{ \varphi_n(x_n) + f_{n-1}(K - x_n) \right\}.$$

Оскільки у даній задачі капіталовкладення задані дискретно, і зі зростанням капіталовкладень зростає й випуск випуску продукції, то можемо записати для визначення функції f_1 наступну формулу:

$$f_1(K) = \max_{x_1=0,\dots,K} \left\{ \varphi_1(x_1) \right\} = \varphi_1(K).$$

Обчислимо функції f_2:

$$f_2(50) = \max_{x_2=0,50} \left\{ \begin{matrix} \varphi_2(0) + f_1(50) = 25 \\ \varphi_2(50) + f_1(0) = 30 \end{matrix} \right\} = 30;$$

$$f_2(100) = \max_{x_2=0,50,100} \left\{ \begin{matrix} \varphi_2(0) + f_1(100) = 60 \\ \varphi_2(50) + f_1(50) = 25 + 30 = 55 \\ \varphi_2(100) + f_1(0) = 70 \end{matrix} \right\} = 70;$$

$$f_2(150)=\max_{\substack{x_2=0,50,\\100,150}}\begin{Bmatrix}\varphi_2(0)+f_1(150)=100\\ \varphi_2(50)+f_1(100)=30+60=90\\ \varphi_2(100)+f_1(50)=70+25=95\\ \varphi_2(150)+f_1(0)=90\end{Bmatrix}=100;$$

$$f_2(200)=\max_{\substack{x_4=0,50,100,\\150,200}}\begin{Bmatrix}\varphi_2(0)+f_1(200)=140\\ \varphi_2(50)+f_1(150)=30+100=130\\ \varphi_2(100)+f_1(100)=70+60=130\\ \varphi_2(150)+f_1(50)=90+25=115\\ \varphi_2(200)+f_1(0)=122\end{Bmatrix}=140;$$

Обчислимо функції f_3:

$$f_3(50)=\max_{x_3=0,50}\begin{Bmatrix}\varphi_3(0)+f_2(50)=30\\ \varphi_3(50)+f_2(0)=36\end{Bmatrix}=36;$$

$$f_3(100)=\max_{x_3=0,50,100}\begin{Bmatrix}\varphi_3(0)+f_2(100)=70\\ \varphi_3(50)+f_2(50)=36+30=66\\ \varphi_3(100)+f_2(0)=64\end{Bmatrix}=70;$$

$$f_3(150)=\max_{\substack{x_3=0,50,\\100,150}}\begin{Bmatrix}\varphi_3(0)+f_2(150)=100\\ \varphi_3(50)+f_2(100)=36+70=106\\ \varphi_3(100)+f_2(50)=64+30=94\\ \varphi_3(150)+f_2(0)=95\end{Bmatrix}=106;$$

$$f_3(200)=\max_{\substack{x_3=0,50,100,\\150,200}}\begin{Bmatrix}\varphi_3(0)+f_2(200)=140\\ \varphi_3(50)+f_2(150)=36+100=136\\ \varphi_3(100)+f_2(100)=64+70=134\\ \varphi_3(150)+f_2(50)=95+30=125\\ \varphi_3(200)+f_2(0)=130\end{Bmatrix}=140;$$

$$f_4(200) = \max_{\substack{x_4=0,50,100,\\150,200}} \begin{Bmatrix} \varphi_4(0) + f_3(200) = 140 \\ \varphi_4(50) + f_3(150) = 28 + 106 = 134 \\ \varphi_4(100) + f_3(100) = 56 + 70 = 126 \\ \varphi_4(150) + f_3(50) = 110 + 36 = 146 \\ \varphi_4(200) + f_3(0) = 142 \end{Bmatrix} = 146 .$$

Одержані результати наведено в табл. 8.2.

Таблиця 8.2.

Капіталовкладення, тис. грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***			
	$f_1(K)$	$f_2(K)$	$f_3(K)$	$f_4(K)$
0	0	0	0	–
50	25	30	36	–
100	60	70	70	–
150	100	100	106	–
200	140	140	140	142

Максимальний загальний приріст продукції – ***146*** тис. грн. Для визначення в яку фірму скільки капіталовкладень потрібно здійснювати, визначимо, в якому рядку знайшли оптимальний розв'язок. Найбільшого значення функція $f_4(200)$ досягає у четвертому рядку, що відповідає сумі функцій $\varphi_4(150)$ та $f_3(50)$. Тобто потрібно вкласти ***150*** тис. грн у четверту фірму, а решта 50 тис. грн розподілити між іншими трьома фірмами. Аналогічно з функції $f_3(50)$ визначаємо, що ***50*** тис. грн потрібно вкласти у третю фірму, а у перші дві фірми взагалі не здійснювати капіталовкладень.

Отже, для отримання максимального загального приросту продукції в ***146*** тис. грн потрібно вкласти ***50*** тис. грн. у третю фірму, ***150*** тис. грн у четверту, а в першу і другу не робити ніяких капіталовкладень.

Приклад 8.2. Паром завантажується предметами n різних типів вагою w_j вартістю c_j, $j = \overline{1,n}$. Максимальна вантажопідйомність $W=5$. Визначити максимальну вартість вантажу, вага якого не більше W.

	Вага, т *(w_j)*	Вартість, тис. грн *(c_j)*
1	1	30
2	2	65
3	3	92

Розв'язання:

Нехай x_j – кількість предметів j-го типу, які завантажують на паром. Тоді математична модель матиме вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le W,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},$$

$$x_j - цілі.$$

У цій задачі динамічного програмування етап j пов'язаний із завантаженням предметів j-го типу в кількості x_j одиниць (x_j – керована змінна).

Стан парому ξ_j на j-му етапі визначається з обмеження моделі:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{j} w_i x_i,\ \ j = \overline{1,n};\ \ 0 \le \xi_j \le W;\ \xi_n = W.$$

Ціль управління на етапі $z_j = c_j x_j,\ \ j = \overline{1,n}.$

Варіанти розв'язку x_j етапу j описуються кількістю предмету типу j: $x_j = 0,1,2,...,\lfloor W / w_j \rfloor$ – цілі.

Нехай $f_j(\xi_j)$ – значення цільової функції, що відображає вартість предметів, включених на етапах j, $j = \overline{1,n}$ при заданому стані системи ξ_j.

$$f_{n+1}(\xi_{n+1}) = 0;$$

$$f_j(\xi_j) = \max_{x_j = 0,1,...,\left[\frac{W}{w_j}\right]} \{c_j x_j + f_{j+1}(\xi_j - w_j x_j)\},\ \ j = \overline{1,n};$$

$$\xi_j = 0,...,W;$$

$$\xi_j \ge w_j x_j.$$

Крок 1. Запишемо рекурентні співвідношення для кожного кроку управління:

$$f_4(\xi)=0;$$

$$f_3(\xi)=\max_{\substack{x_3=0,1,\dots,\left[\frac{\xi}{3}\right]=\\=0,1}}\{30x_3+f_4(\xi-3x_3)\};$$

$$f_2(\xi)=\max_{\substack{x_2=0,1,\dots,\left[\frac{\xi}{2}\right]=\\=0,1}}\{65x_2+f_3(\xi-2x_2)\};$$

$$f_1(\xi)=\max_{\substack{x_1=0,1,\dots,\left[\frac{\xi}{1}\right]=\\=0,1}}\{82x_1+f_2(\xi-x_1)\}.$$

Крок 2. Визначимо максимальні ефективності різних станів для ***3***-го етапу управління:

$$f_3(0)=\max_{x_3=0,\dots,\left[\frac{0}{3}\right]=0}\{82\cdot 0+f_4(0-3\cdot 0)\}=0;$$

$$f_3(1)=\max_{x_3=0,\dots,\left[\frac{1}{3}\right]=0}\{82\cdot 0+f_4(1-3\cdot 0)\}=0;$$

$$f_3(2)=\max_{x_3=0,\dots,\left[\frac{2}{3}\right]=0}\{82\cdot 0+f_4(2-3\cdot 0)\}=0;$$

$$f_3(3)=\max_{x_3=0,\dots,\left[\frac{3}{3}\right]=0,1}\left\{\begin{matrix}82\cdot 0+f_4(3-3\cdot 0)=0\\82\cdot 1+f_4(3-3\cdot 1)=82\end{matrix}\right\}=82;$$

$$f_3(4)=\max_{x_3=0,\dots,\left[\frac{4}{3}\right]=0,1}\left\{\begin{matrix}82\cdot 0+f_4(3-3\cdot 0)=0\\82\cdot 1+f_4(3-3\cdot 1)=82\end{matrix}\right\}=82;$$

$$f_3(5)=\max_{x_3=0,\dots,\left[\frac{5}{3}\right]=0,1}\left\{\begin{matrix}82\cdot 0+f_4(3-3\cdot 0)=0\\82\cdot 1+f_4(3-3\cdot 1)=82\end{matrix}\right\}=82.$$

Крок 3. Визначимо максимальні ефективності різних станів для ***2***-го етапу управління:

$$f_2(0)=\max_{x_2=0,\dots,\left[\frac{0}{2}\right]=0}\{65\cdot 0+f_3(0-2\cdot 0)\}=0;$$

$$f_2(1)=\max_{x_2=0,\dots,\left[\frac{1}{2}\right]=0}\{65\cdot 0+f_3(1-2\cdot 0)\}=0;$$

$$f_2(2)=\max_{x_2=0,\dots,\left[\frac{2}{2}\right]=0,1}\begin{Bmatrix}65\cdot 0+f_3(2-2\cdot 0)\\65\cdot 1+f_3(2-2\cdot 1)\end{Bmatrix}=65;$$

$$f_2(3)=\max_{x_2=0,\dots,\left[\frac{3}{2}\right]=0,1}\begin{Bmatrix}65\cdot 0+f_3(3-2\cdot 0)\\65\cdot 1+f_3(3-2\cdot 1)\end{Bmatrix}=65;$$

$$f_2(4)=\max_{x_2=0,\dots,\left[\frac{4}{2}\right]=0,1,2}\begin{Bmatrix}65\cdot 0+f_3(4-2\cdot 0)=0+82\\65\cdot 1+f_3(4-2\cdot 1)=65+0\\65\cdot 2+f_3(4-2\cdot 2)=130+0\end{Bmatrix}=130;$$

$$f_2(5)=\max_{x_2=0,\dots,\left[\frac{5}{2}\right]=0,1,2}\begin{Bmatrix}65\cdot 0+f_3(5-2\cdot 0)=0+82\\65\cdot 1+f_3(5-2\cdot 1)=65+82\\65\cdot 2+f_3(5-2\cdot 2)=130+0\end{Bmatrix}=147.$$

Крок 4. Визначимо максимальні ефективності стану $\xi=5$ для ***1***-го етапу управління (для $\xi<5$ стани не визначатимемо, оскільки задача передбачає максимальне завантаження парому):

$$f_1(5)=\max_{\substack{x_1=0,1,\dots,\left[\frac{5}{1}\right]=\\=0,1,2,3,4,5}}\begin{Bmatrix}30\cdot 0+f_2(5-0)=0+147\\30\cdot 1+f_2(5-1)=30+130\\30\cdot 2+f_2(5-2)=60+65\\30\cdot 3+f_2(5-3)=90+65\\30\cdot 4+f_2(5-4)=120+0\\30\cdot 5+f_2(5-5)=150+0\end{Bmatrix}=160.$$

Крок 5. Визначимо оптимальні управління для даного динамічного процесу (зворотній хід).

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=0.$$

Отже, на паром потрібно завантажити ***1*** предмет першого типу (***1*** т), ***2*** предмети другого типу (***2*** т) та жодного предмету третього типу. Сумарна вартість вантажу становитиме ***160*** тис. грн.

Приклад 8.3. Обладнання експлуатується упродовж п'яти років, після чого продається. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну обладнання або про його подальшу експлуатацію. Вартість нового обладнання ***800*** тис. грн. Після ***t*** років експлуатації може бути продано за $q(t)=\dfrac{800}{2^t}$ тис. грн. Затрати на утримання обладнання упродовж року залежать від його віку і становлять ***110***

(t+1) тис. грн. Визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання за умови мінімізації витрат з урахуванням початкової купівлі та кінцевого продажу.

Розв'язання.

Параметром стану системи є вік обладнання, тобто $s_{k-1} = t$. Для нового обладнання на початку першого року експлуатації $s_0 = 0$. Управління на кожному кроці визначається двома змінними $X_k = X_з$ (зберегти) та $X_k = X_о$ (оновити). Тоді

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k) = \begin{Bmatrix} t+1, \text{ якщо } X_k = X_з \\ 1, \text{ якщо } X_k = X_о \end{Bmatrix} = k = 1,2,3,4,5. \quad (5.27)$$

Якщо обладнання оновлюють, то на початок ***k***-го кроку його вік буде дорівнювати нулю, а після року експлуатації $t = 1$, тобто $s_k = 1$.

Показник ефективності ***k***-го кроку:

$$f_k(s_k, X_k) = \begin{cases} 110(t+1), \text{ якщо } X_k = X_з, \\ 800 + 110 - \dfrac{800}{2^t}, \text{ якщо } X_k = X_о. \end{cases}$$

При збереженні обладнання віком ***t*** років витрати включають лише вартість експлуатації, що становить ***110(t+1)*** грн. Витрати на оновлення обладнання (***800*** тис. грн), експлуатацію його упродовж року та продаж старого обладнання за $\dfrac{800}{2^t}$ грн в сумі становитимуть $910 - \dfrac{800}{2^t}$.

Запишемо рекурентні співвідношення:

$$F_k^*(s_{k-1}) = \begin{cases} 110(t+1) + F_{k+1}^*(t+1), \text{ якщо } X_k = X_з, \\ 800 + 110 - \dfrac{800}{2^t} + F_{k+1}^*(1), \text{ якщо } X_k = X_о, \end{cases}$$

де $s_k = t + 1$. У другому рівнянні аргументом умовного максимуму цільової функції є одиниця, оскільки вік обладнання після заміни в кінці року дорівнює одиниці.

Розв'яжемо дану задачу геометрично. Для цього побудуємо графік станів і управлінь (рис. 8.8), по осі абсцис відкладатимемо номер кроку ***k***, а по осі ординат – вік обладнання ***t***.

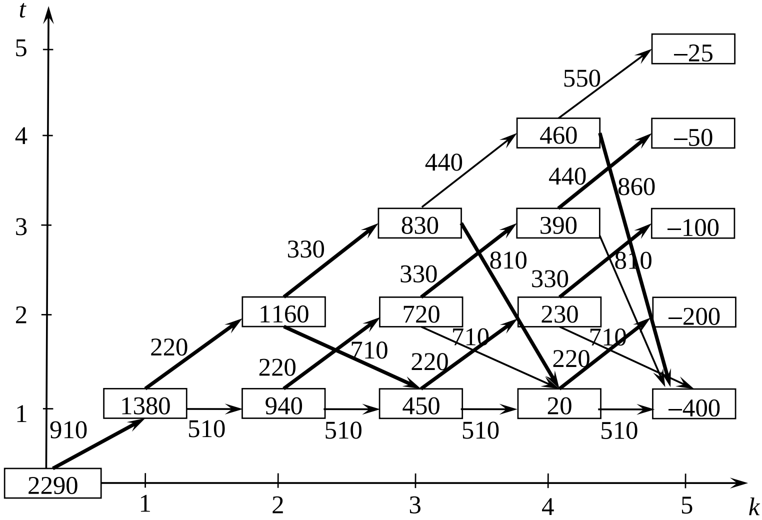


Рис.8.8. Геометрична інтерпретація задачі заміни обладнання

Стани обладнання позначені на рисунку прямокутниками. Початковий і кінцевий стан обладнання відповідають точкам ***(0;0)*** і ***(5;t)*** відповідно. Позначимо їх $\boldsymbol{s(0;0)}$ та $\boldsymbol{s(5;t)}$. Кожний стан обладнання, крім стану з останнього стовпця, з'єднується стрілками із двома наступними. Верхня стрілка відповідає збереженню обладнання, а нижня – заміні. Над кожною стрілкою запишемо відповідні витрати.

Поруч із стрілкою, яка з'єднує початкову подію $\boldsymbol{s(0;0)}$ і подію $\boldsymbol{s(1;1)}$ запишемо число ***910*** тис. грн (сумарні витрати першого кроку: на початку процесу закуплено нове обладнання вартістю ***800*** тис. грн і витрачено на експлуатацію упродовж першого року $\boldsymbol{110(t+1)=110(0+1)=110}$ грн).

Поруч із стрілкою, яка з'єднує подію $\boldsymbol{s(1;1)}$ і подію $\boldsymbol{s(2;2)}$ (варіант «збереження») запишемо число ***220*** (витрати на зберігання обладнання після першого кроку становлять $\boldsymbol{110(t+1)=110(1+1)=220}$ тис. грн). Поруч із стрілкою, яка з'єднує подію $s(1;1)$ і подію $s(2;1)$ (варіант «оновлення») запишемо $910-\frac{800}{2^t}=910-\frac{800}{2^1}=510$ тис.грн.

Аналогічно:

$s(2;1)-s(3;2)$: $110(t+1)=110(1+1)=220$ тис.грн («збереження»);

$s(2;1)-s(3;1)$: $910-\frac{800}{2^t}=910-\frac{800}{2^1}=510$ тис.грн («оновлення»);

$s(2;2)-s(3;3)$: $110(t+1)=110(2+1)=330$ тис.грн («збереження»);

$s(2;2)-s(3;1)$: $910-\frac{800}{2^t}=910-\frac{800}{2^2}=710$ тис.грн («оновлення»);

$s(3;1)-s(4;2)$: $110(t+1)=110(1+1)=220$ тис.грн («збереження»);

$s(3;1)-s(4;1)$: $910-\frac{800}{2^t}=910-\frac{800}{2^1}=510$ тис.грн («оновлення»);

$s(3;2)-s(4;3)$: $110(t+1)=110(2+1)=330$ тис.грн («збереження»);

$s(3;2)-s(4;1)$: $910-\frac{800}{2^t}=910-\frac{800}{2^2}=710$ тис.грн («оновлення»);

$s(3;3)-s(4;4)$: $110(t+1)=110(3+1)=440$ тис.грн («збереження»);

$s(3;3)-s(4;1)$: $910-\frac{800}{2^t}=910-\frac{800}{2^3}=810$ тис.грн («оновлення»).

Використовуючи записані вище формули, запишемо величини затрат для всіх стрілок на рис.8.8.

Розрахунок умовного максимуму цільової функції $F_k^*(s_{k-1})$ проведемо за формулою, починаючи з останнього, п'ятого кроку. У цьому випадку за початковий стан приймаються точки *(4;t)*, а за кінцевий – точки *(5;t)*. У стані *(5;t)* обладнання продається. Дохід від продажу розраховується за формулою $q(t)=\frac{800}{2^t}$. Отримані результати запишемо у прямокутники останнього стовпця.

Визначимо для будь якого варіанту п'ятого кроку оптимальне управління і визначимо ці управління жирною стрілкою.

Із стану *(4;1)* можна перейти в стан *(5;1)* та *(5;2)*.

Для випадку ***(4;1)–(5;1)*** витрати визначаються за другою формулою із (5.29):

$$\boldsymbol{800 + 110 - \frac{800}{2^t} + F^*_{k+1}(1) = 910 - \frac{800}{2} - 400 = 110} \text{ грн.}$$

Цю величину можна знайти з рисунку. Для цього потрібно сумувати значення, що записано біля стрілки, яка з’єднує ***(4;1)*** та ***(5;1)***, та значення, яке записано у прямокутнику ***(5;1)***:

510–400=110 тис. грн.

Для випадку (4;1)–(5;2) витрати визначаються за першою формулою із (5.29):

$$\boldsymbol{110(t+1) + F^*_{k+1}(t+1) = 110(1+1) - 200 = 20} \text{ грн.}$$

Таким чином, оптимальним управлінням для стану ***(4;1)*** є $\boldsymbol{X_k = X_з}$ («зберегти»), тобто випадок ***(4;1)–(5;2)***.

Умовний мінімум цільової функції при цьому $\boldsymbol{F^*_5(s_{k-1}) = F^*_5(1) = 20}$ грн, оскільки вік обладнання $\boldsymbol{s_{k-1} = t = 1}$.

Запишемо умовний мінімум цільової функції у квадрат точки ***(4;1)***, а управління ***(4;1)–(5;2)*** відзначимо жирною стрілкою.

Із стану ***(4;2)*** можна перейти в стан ***(5;1)*** та ***(5;3)***. Для випадку ***(4;2)–(5;1)*** витрати визначаються як сума значення, що стоїть біля стрілки, яка з’єднує ***(4;2)*** та ***(5;1)***, та значення, яке стоїть у прямокутнику ***(5;1)***:

710–400=310 тис. грн.

Для випадку ***(4;2)–(5;3)*** витрати визначаються за першою формулою:

$$\boldsymbol{110(t+1) + F^*_{k+1}(t+1) = 110(2+1) - 100 = 230} \text{ тис. грн.}$$

Оптимальним управлінням для стану ***(4;2)*** є $\boldsymbol{X_k = X_з}$ (зберегти), тобто випадок ***(4;2)–(5;3)***.

Умовний мінімум цільової функції при цьому становить $\boldsymbol{F^*_5(s_{k-1}) = F^*_5(2) = 230}$ тис. грн, оскільки вік обладнання $\boldsymbol{s_{k-1} = t = 2}$.

Запишемо умовний мінімум цільової функції у квадрат точки ***(4;2)***, а управління ***(4;2)–(5;3)*** відзначимо жирною стрілкою.

Із стану ***(4;3)*** можна перейти в стан ***(5;1)*** та ***(5;4)***. Для випадку ***(4;3)–(5;1)*** витрати дорівнюють ***810–400=410*** тис. грн, а для випадку ***(4;3)–(5;4)*** – ***440–50=390*** тис. грн.

Оптимальним управлінням для стану ***(4;3)*** є $\boldsymbol{X_k = X_з}$ («зберегти»), тобто випадок ***(4;3)–(5;4)***.

Умовний мінімум цільової функції при цьому становить $F_5^*(s_{k-1}) = F_5^*(3) = 390$ тис. грн.

Аналогічно визначаються витрати на будь-якому кроці. Після проведення оптимізації в точці ***(0;0)*** отримаємо мінімальні затрати на експлуатацію обладнання упродовж п’яти років із подальшим продажем. Ця величина $F_1^*(0) = 2290$ тис. грн.

Оптимальну траєкторію побудуємо, рухаючись з точки ***(0;0)*** по жирних стрілках. Оптимальному управлінню відповідає набір точок

(0;0)–(1;1) – (2;2) – (3;1) – (4;2) – (5;3).

Таким чином, оптимальне управління заміни обладнання має вигляд:

$$X^* = (X_з, X_з, X_o, X_з, X_з)$$

Тобто, оптимальне управління заміни обладнання полягає в тому, щоб замінити його на нове на початку третього року.

Приклад 8.4. Потреби фірми в деякій однорідній продукції протягом п’яти періодів, відповідно такі: $d_1 = 30;\ d_2 = 40;\ d_3 = 30;$ $d_4 = 50;\ d_5 = 40$ одиниць продукції.

Для перевезення цієї продукції використовують один вантажний автомобіль вантажопідйомністю ***100*** одиниць продукції. Вартість перевезення в кожному рейсі становить $10 + 0{,}1x$, де x – кількість продукції, яку перевозять.

Необхідно, щоб потреби виробництва в кожному періоді були повністю задоволені. Якщо частина продукції залишається на наступний період, то для її зберігання можна використати склад, що вміщує ***50*** одиниць продукції. Вартість зберігання однієї одиниці продукції протягом одного періоду - $0{,}2 \cdot v$ (де v - кількість продукції, яку зберігають). Початковий запас продукції на складі дорівнює нулю ($v_0 = 0$).

Визначити, яку кількість продукції потрібно перевозити в кожен період, щоб мінімізувати сумарні затрати на перевезення і зберігання цієї продукції.

Розв'язання:

Нехай x_i – кількість продукції, яку перевозять в i-й період, $i=\overline{1,5}$; v_i – залишок продукції на кінець i-го періоду; q_i – затрати в i-му періоді.

Тоді

$$v_i = v_{i-1} + x_i - d_i,$$

$$q_i(v_{i-1}, x_i) = 0{,}2 \cdot v_{i-1} + \begin{cases} 10 + 0{,}1 \cdot x_i, & \text{якщо} \quad x_i > 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad x_i = 0 \end{cases}$$

де $(0{,}2 \cdot v_{i-1})$ – затрати на зберігання, $(10 + 0{,}1 \cdot x_i)$ – затрати на перевезення.

Сумарні затрати на період, який розглядаємо, становитимуть:

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} q_i(v_{i-1}, x_i).$$

Величини x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 повинні задовольняти умову невід'ємності $(x_i \geq 0)$ й умову, щоб у кожен період потреби фірми були задоволені:

$$v_0 + x_1 \geq d_1;$$
$$v_1 + x_2 \geq d_2;$$
$$v_2 + x_3 \geq d_3;$$
$$v_3 + x_4 \geq d_4;$$
$$v_4 + x_5 \geq d_5.$$

Одержимо задачу

$$\min R; \quad R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} q_i(v_{i-1}, x_i);$$
$$v_{i-1} + x_i \geq d_i, \quad i = \overline{1,5};$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Розв'яжемо цю задачу методами динамічного програмування. Згідно з принципом оптимальності Беллмана почнемо розв'язувати задачу з останнього (п'ятого) періоду. Яка б кількість продукту v_4 не залишилась від попереднього періоду, x_5 треба підібрати так, щоб:

1) задовольнити попит п'ятого періоду, тобто щоб $v_4 + x_5 \geq d_5$;

2) щоб затрати $q_5(v_4, x_5)$ в цьому періоді досягли найменшого значення.

Позначимо $f_1^*(v_4) = \min\limits_{x_5} q_5(v_4, x_5)$. Після того, як одержимо для кожного v_4 оптимальне значення $x_5 = x_5^*(v_4)$, за якого досягається цей мінімум, перейдемо до четвертого періоду.

Позначимо через $f_2(v_3)$ сумарні затрати в четвертому та п'ятому періоді за умови, що в четвертому періоді вибираємо будь-яке допустиме значення x_4, яке задовольняє умову $x_4 \geq 0$ і $v_3 + x_4 \geq d_4$, а у п'ятому періоді оптимальне значення $x_5 = x_5^*(v_4)$.

$$f_2^*(v_3) = \min_{x_4}\{q_4(v_3, x_4) + f_1^*(v_3 + x_4 - d_4)\}.$$

Значення x_4 треба вибрати таким, щоб вираз у дужках досягав мінімуму для кожного значення v_3. Позначимо через $x_4^*(v_3)$ те значення x_4, яке забезпечує цей мінімум. Після цього перейдемо до третього періоду.

Сумарні затрати в третьому, четвертому та п'ятому періодах позначимо $f_3(v_2)$ за умови, що в третьому періоді вибираємо будь-яке допустиме значення x_3 (повинно задовольняти умову $x_3 \geq 0$ і $v_2 + x_3 \geq d_3$, а у двох наступних періодах – оптимальне значення: $x_4^*(v_3)$ і $x_5^*(v_4)$.

$$f_3^*(v_2) = \min_{x_3}\{q_3(v_2, x_3) + f_2^*(v_2 + x_3 - d_3)\}.$$

Через $x_3^*(v_2)$ позначимо те оптимальне значення x_3, за якого досягається цей мінімум. Таким же способом, розглянемо всі задані періоди, при чому на кожному кроці одержимо оптимальну стратегію в разі будь-якого залишку ресурсів від попереднього періоду. Це дасть змогу визначити оптимальну поведінку за будь-якого початкового рівня запасів, у тому числі й при $v_0 = 0$.

Одержані дані зручно записувати в таблицю (у рядках – різні значення залишку від попереднього періоду; у стовпцях – оптимальні значення затрат і кількості продукту, який перевозять на кожному кроці).

Таблиця 8.3.
Оптимальні затрати

v	$f_1^*(v_4)$	$x_5^*(v_4)$	$f_2^*(v_3)$	$x_4^*(v_3)$	$f_3^*(v_2)$	$x_3^*(v_2)$	$f_4^*(v_1)$	$x_2^*(v_3)$	$f_5^*(v_0)$	$x_1^*(v_0)$
0	14	40	27	90	40	30	50	70	63	30
10	15	30	28	80	41	20	51	60		
20	16	20	29	70	42	10	52	50		
30	17	10	30	60	33	0	53	40		
40	8	0	31	50	36	0	48	0		
50	10	0	24	0	39	0	51	0		

Розглянемо, як виконувати розрахунки на кожному кроці.

Потреба п’ятого періоду – ***40***.

1. $f_1^*(v_4)=\min\limits_{x_5} q_5(v_4,x_5)$;

$$q_5(v_4,x_5)=0{,}2v_4+\begin{cases}10+0{,}1x & x_5>0\\ 0 & x_5=0\end{cases}.$$

Незалежно від значення v_4 для повного задоволення попиту в межах останнього періоду обсяг випуску дорівнює різниці між попитом і залишком продукції: $x_5=d_5-v_4$, тому що $v_5=0$.

Перевіримо, чи виконується це для $v_4=0$:

$x_5^*=d_5-v_4=40-0=40$;

$v_4=0,\quad v_4+x_4\ge 40,\quad x_4\ge 40$;

$$f_1^*(0)=\min\left\{\begin{array}{c} q_5(0;40)=0{,}2\cdot 0+10+0{,}1\cdot 40=14\\ q_5(0;50)=0{,}2\cdot 0+10+0{,}1\cdot 50=15\\ q_5(0;60)=0{,}2\cdot 0+10+0{,}1\cdot 60=16\\ q_5(0;70)=0{,}2\cdot 0+10+0{,}1\cdot 70=17\\ q_5(0;80)=0{,}2\cdot 0+10+0{,}1\cdot 80=18\\ q_5(0;90)=0{,}2\cdot 0+10+0{,}1\cdot 90=19\\ q_5(0;100)=0{,}2\cdot 0+10+0{,}1\cdot 100=20\end{array}\right\}=14;$$

$x_5^*(0)=40$;

$v_4=10\quad x_5^*=d_5-v_4=40-10=30$;

$f_1^*(10)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 30=15$; $\qquad x_5^*(10)=30$;

$v_4 = 20 \quad x_5^* = d_5 - v_4 = 40 - 20 = 20$;
$f_1^*(20) = 0{,}2 \cdot 20 + 10 + 0{,}1 \cdot 20 = 16$; $\qquad x_5^*(20) = 20$;

$v_4 = 30 \quad x_5^* = d_5 - v_4 = 40 - 30 = 10$;
$f_1^*(30) = 0{,}2 \cdot 30 + 10 + 0{,}1 \cdot 10 = 17$; $\qquad x_5^*(30) = 10$;

$v_4 = 40 \quad x_5^* = d_5 - v_4 = 40 - 40 = 0$;
$f_1^*(40) = 0{,}2 \cdot 40 = 8$; $\qquad x_5^*(40) = 0$;

$v_4 = 50 \quad x_5^* = d_5 - v_4 = 40 - 50 = -10$.
Оскільки $x_5 \geq 0$, то отримаємо:
$f_1^*(50) = 0{,}2 \cdot 50 = 10$; $\qquad x_5^*(50) = 0$.

2.
$$f_2^*(v_3) = \min_{x_4}\{q_4(v_3, x_4) + f_1^*(v_3 + x_4 - d_4)\} = \min_{x_4}\{q_4(v_3, x_4) + f_1^*(v_3 + x_4 - 50)\};$$

$0 + x_4 \geq 50, \quad 50 \leq x_4 \leq 90$;

$$f_2^*(0) = \min\left\{\begin{array}{c} q_4(0;50) + f_1^*(0) = 0{,}2 \cdot 0 + 10 + 0{,}1 \cdot 50 + 14 = 29 \\ q_4(0;60) + f_1^*(10) = 0{,}2 \cdot 0 + 10 + 0{,}1 \cdot 60 + 15 = 31 \\ q_4(0;70) + f_1^*(20) = 0{,}2 \cdot 0 + 10 + 0{,}1 \cdot 70 + 16 = 33 \\ q_4(0;80) + f_1^*(30) = 0{,}2 \cdot 0 + 10 + 0{,}1 \cdot 80 + 17 = 35 \\ q_4(0;90) + f_1^*(40) = 0{,}2 \cdot 0 + 10 + 0{,}1 \cdot 90 + 8 = 27 \end{array}\right\} = 27;$$

$x_4^*(0) = 90$;

$10 + x_4 \geq 50, \quad 40 \leq x_4 \leq 80$;

$$f_2^*(10)=\min\left\{\begin{array}{l} q_4(10;40)+\ f_1^*(0)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 40+14=30\\ q_4(10;50)+\ f_1^*(10)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 50+15=32\\ q_4(10;60)+\ f_1^*(20)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 60+16=34\\ q_4(10;70)+\ f_1^*(30)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 70+17=36\\ q_4(10;80)+\ f_1^*(40)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 80+8=28 \end{array}\right\}=28;$$

$$x_4^*(10)=80;$$

$$20+x_4\ge 50,\quad 30\le x_4\le 70;$$

$$f_2^*(20)=\min\left\{\begin{array}{l} 0{,}2\cdot 20+10+0{,}1\cdot 30+14=31\\ 0{,}2\cdot 20+10+0{,}1\cdot 40+15=33\\ 0{,}2\cdot 20+10+0{,}1\cdot 50+16=35\\ 0{,}2\cdot 20+10+0{,}1\cdot 60+17=37\\ 0{,}2\cdot 20+10+0{,}1\cdot 70+8=29 \end{array}\right\}=29;$$

$$x_4^*(20)=70;$$

$$30+x_4\ge 50,\quad 20\le x_4\le 60;$$

$$f_2^*(30)=\min\left\{\begin{array}{l} 0{,}2\cdot 30+10+0{,}1\cdot 20+14=32\\ 0{,}2\cdot 30+10+0{,}1\cdot 30+15=34\\ 0{,}2\cdot 30+10+0{,}1\cdot 40+16=36\\ 0{,}2\cdot 30+10+0{,}1\cdot 50+17=38\\ 0{,}2\cdot 30+10+0{,}1\cdot 60+8=30 \end{array}\right\}=30;$$

$$x_4^*(30)=60;$$

$$40+x_4\ge 50,\quad 10\le x_4\le 50;$$

$$f_2^*(40)=\min\begin{Bmatrix} 0{,}2\cdot 40+10+0{,}1\cdot 10+14=33 \\ 0{,}2\cdot 40+10+0{,}1\cdot 20+15=35 \\ 0{,}2\cdot 40+10+0{,}1\cdot 30+16=37 \\ 0{,}2\cdot 40+10+0{,}1\cdot 40+17=39 \\ 0{,}2\cdot 40+10+0{,}1\cdot 50+8=31 \\ \end{Bmatrix}=31;$$

$$x_4^*(40)=50;$$

$$50+x_4\ge 50,\quad 0\le x_4\le 40;$$

$$f_2^*(50)=\min\begin{Bmatrix} 0{,}2\cdot 50+10+0{,}1\cdot 0+14=24 \\ 0{,}2\cdot 50+10+0{,}1\cdot 10+15=36 \\ 0{,}2\cdot 50+10+0{,}1\cdot 20+16=38 \\ 0{,}2\cdot 50+10+0{,}1\cdot 30+17=40 \\ 0{,}2\cdot 50+10+0{,}1\cdot 40+8=32 \\ \end{Bmatrix}=24;$$

$$x_4^*(50)=0.$$

3.

$$\begin{aligned} f_3^*(v_2)&=\min_{x_3}\left\{q_3(v_2,x_3)+f_2^*(v_2+x_3-d_3)\right\}= \\ &=\min_{x_3}\left\{q_3(v_2,x_3)+f_2^*(v_2+x_3-30)\right\} \end{aligned};$$

$$0+x_3\ge 30,\quad x_3\ge 30;$$

$$f_3^*(0)=\min\begin{Bmatrix} q_3(0;30)+f_2^*(0)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 30+27=40 \\ q_3(0;40)+f_2^*(10)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 40+28=42 \\ q_3(0;50)+f_2^*(20)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 50+29=44 \\ q_3(0;60)+f_2^*(30)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 60+30=46 \\ q_3(0;70)+f_2^*(40)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 70+31=48 \\ q_3(0;80)+f_2^*(50)=0{,}2\cdot 10+10+0{,}1\cdot 80+24=52 \end{Bmatrix}=40$$

;

$$x_3^*(0)=30;$$

$$10+x_3\ge 30,\quad x_3\ge 20;$$

$$f_3^*(10)=min\begin{Bmatrix}0,2\cdot 10+10+0,1\cdot 20+27=41\\0,2\cdot 10+10+0,1\cdot 30+28=43\\0,2\cdot 10+10+0,1\cdot 40+29=45\\0,2\cdot 10+10+0,1\cdot 50+30=47\\0,2\cdot 10+10+0,1\cdot 60+31=49\\0,2\cdot 10+10+0,1\cdot 70+24=43\end{Bmatrix}=41;$$

$x_3^*(10)=20;$

$20+x_3\geq 30,\quad x_3\geq 10;$

$$f_3^*(20)=min\begin{Bmatrix}0,2\cdot 20+10+0,1\cdot 10+27=42\\0,2\cdot 20+10+0,1\cdot 20+28=44\\0,2\cdot 20+10+0,1\cdot 30+29=46\\0,2\cdot 20+10+0,1\cdot 40+30=48\\0,2\cdot 20+10+0,1\cdot 50+31=50\\0,2\cdot 20+10+0,1\cdot 60+24=44\end{Bmatrix}=42;$$

$x_3^*(20)=10;$

$30+x_3\geq 30,\quad x_3\geq 0;$

$$f_3^*(30)=min\begin{Bmatrix}0,2\cdot 30+10+0,1\cdot 0+27=33\\0,2\cdot 30+10+0,1\cdot 10+28=45\\0,2\cdot 30+10+0,1\cdot 20+29=47\\0,2\cdot 30+10+0,1\cdot 30+30=49\\0,2\cdot 30+10+0,1\cdot 40+31=51\\0,2\cdot 30+10+0,1\cdot 50+24=45\end{Bmatrix}=33;$$

$x_3^*(30)=0;$

$40+x_3\geq 30,\quad x_3=0;$

$f_3^*(40)=0,2\cdot 40+f_2^*(40+x_5-30)=8+28=36;$

$x_3^*(40)=0;$

$50+x_3\geq 30,\quad x_3=0;$

$f_3^*(50)=0,2\cdot 50+f_2^*(50+x_5-30)=10+29=39;$

$$x_3^*(50)=0;$$

4.

$$f_4^*(v_1)=\min_{x_2}\left\{q_2(v_1,x_2)+f_3^*(v_1+x_2-d_2)\right\}=$$

$$=\min_{x_2}\left\{q_2(v_1,x_2)+f_3^*(v_1+x_2-40)\right\}$$

$$0+x_2\geq 40,\quad x_2\geq 40;$$

$$f_4^*(0)=\min\left\{\begin{matrix} q_3(0;40)+f_3^*(0)=10+0,1\cdot 40+40=54\\ q_3(0;50)+f_3^*(10)=10+0,1\cdot 50+41=56\\ q_3(0;60)+f_3^*(20)=10+0,1\cdot 60+42=58\\ q_3(0;70)+f_3^*(30)=10+0,1\cdot 70+33=50\\ q_3(0;80)+f_3^*(40)=10+0,1\cdot 80+36=54\\ q_3(0;90)+f_3^*(50)=10+0,1\cdot 90+39=58 \end{matrix}\right\}=50;$$

$$x_2^*(0)=70;$$

$$10+x_2\geq 40,\quad x_2\geq 30;$$

$$f_4^*(10)=\min\left\{\begin{matrix} 0.2\cdot 10+10+0,1\cdot 30+40=55\\ 0.2\cdot 10+10+0,1\cdot 40+41=57\\ 0.2\cdot 10+10+0,1\cdot 50+42=59\\ 0.2\cdot 10+10+0,1\cdot 60+33=51\\ 0.2\cdot 10+10+0,1\cdot 70+36=55\\ 0.2\cdot 10+10+0,1\cdot 80+39=59 \end{matrix}\right\}=51;$$

$$x_2^*(10)=60;$$

$$20+x_2\geq 40,\quad x_2\geq 20;$$

$$f_4^*(20)=\min\left\{\begin{matrix} 0.2\cdot 20+10+0,1\cdot 20+40=56\\ 0.2\cdot 20+10+0,1\cdot 30+41=58\\ 0.2\cdot 20+10+0,1\cdot 40+42=60\\ 0.2\cdot 20+10+0,1\cdot 50+33=52\\ 0.2\cdot 20+10+0,1\cdot 60+36=56\\ 0.2\cdot 20+10+0,1\cdot 70+39=60 \end{matrix}\right\}=52;$$

$$x_2^*(20)=50;$$

$$30+x_2 \geq 40, \quad x_2 \geq 10;$$

$$f_4^*(30)=min\begin{Bmatrix} 0.2\cdot 30+10+0,1\cdot 10+40=57 \\ 0.2\cdot 30+10+0,1\cdot 20+41=59 \\ 0.2\cdot 30+10+0,1\cdot 30+42=61 \\ 0.2\cdot 30+10+0,1\cdot 40+33=53 \\ 0.2\cdot 30+10+0,1\cdot 50+36=57 \\ 0.2\cdot 30+10+0,1\cdot 60+39=61 \end{Bmatrix}=53;$$

$$x_2^*(30)=40;$$

$$40+x_2 \geq 40, \quad x_2=0;$$

$$f_4^*(40)=0,2\cdot 40+f_3^*(0)=8+40=48;$$

$$x_2^*(40)=0;$$

$$50+x_3 \geq 40, \quad x_3=0;$$

$$f_4^*(50)=0,2\cdot 50+f_3^*(10)=10+41=51;$$

$$x_2^*(50)=0.$$

5.

$$f_5^*(0)=\min_{x_1}\{q_1(0,x_1)+f_4^*(0+x_1-d_1)\}=$$

$$=\min_{x_1}\{q_1(0,x_1)+f_4^*(0+x_1-30)\}$$

$$0+x_1 \geq 30, \quad x_1 \geq 30;$$

$$f_5^*(0)=min\begin{Bmatrix} q_1(0;30)+f_4^*(0)=63 \\ q_1(0;40)+f_4^*(10)=65 \\ q_1(0;50)+f_4^*(20)=67 \\ q_1(0;60)+f_4^*(30)=69 \\ q_1(0;70)+f_4^*(40)=65 \\ q_1(0;80)+f_4^*(50)=69 \end{Bmatrix}=63;$$

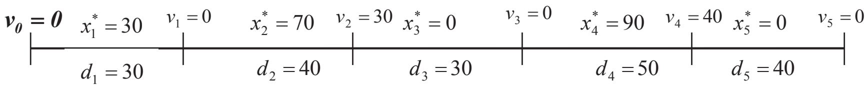
$$x_1^*(0)=30.$$

Оскільки $x_1^*=30$ (потреба першого періоду – 30), то залишок продукції на наступний період дорівнює 0 ($v_1=0$). Знайдемо з таблиці значення x_2^*, що відповідає $v=0(x_2^*=70)$. Якщо $d_2=40$, то залишок на третій період $\boldsymbol{v_2 = 30}$. Для цього залишку виділимо в таблиці відповідне значення $\boldsymbol{x_3^* = 0}$. Залишок на четвертий період дорівнює ***0***. При $\boldsymbol{v = 0}$ $\boldsymbol{x_4^* = 90}$. Потреба в четвертому періоді - ***50***. Тому залишок дорівнює ***40***. При $\boldsymbol{v = 40}$ $\boldsymbol{x_5^* = 0}$.

Отже, оптимальна стратегія: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1^* = 30} \\ \boldsymbol{x_2^* = 70} \\ \boldsymbol{x_3^* = 0} \\ \boldsymbol{x_4^* = 90} \\ \boldsymbol{x_5^* = 0} \end{pmatrix}$.

Мінімальні затрати – ***63***.

Графічно:



Мінімальні сумарні затрати можна знайти й іншим способом:

$\boldsymbol{q_1(0{,}30) = 10 + 0{,}1 \cdot 30 = 13;}$

$\boldsymbol{q_2(0{,}70) = 10 + 0{,}1 \cdot 70 = 17;}$

$\boldsymbol{q_3(30{,}0) = 0{,}2 \cdot 30 = 6;}$

$\boldsymbol{q_4(0{,}90) = 10 + 0{,}1 \cdot 90 = 19;}$

$\boldsymbol{q_5(40{,}0) = 0{,}2 \cdot 40 = 8;}$

63

Приклад 8.5. Річний попит ***d=1500*** одиниць, вартість постачання партії продукції ***Cd =150*** грн/партію, витрати на зберігання одиниці продукції ***s=45*** грн/рік, тривалість постачання ***6*** днів, ***1*** рік=***300*** робочих днів.

Знайти оптимальний розмір замовлення, витати, рівень повторного замовлення.

Розв'язання:

З формули (8.27) визначимо оптимальний розмір замовлення:

$$q = \sqrt{\frac{2C_d d}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 1500}{45}} = 100 \text{ одиниць.}$$

Витрати $L = \frac{C_d d}{q} + \frac{sq}{2} = \frac{150 \cdot 1500}{100} + \frac{45 \cdot 100}{2} = 4500$ грн./рік.

За ***300*** робочих днів реалізується ***1500*** одиниць, за ***6*** днів постачання – x одиниць.

$$\frac{300}{6} = \frac{1500}{x}.$$

Звідси $x = 1500 \cdot 6 / 300 = 30$ одиниць.

Тобто, кожний раз, коли на складі залишається ***30*** одиниць, подається замовлення на ***100*** одиниць.

Річний попит ***d=1500*** одиниць, кожний раз замовляється ***q=100*** одиниць. Тому всього за рік буде продано

$$\frac{d}{q} = \frac{1500}{100} = 15 \text{ замовлень.}$$

Вважають, що за рік пройде ***15*** циклів.

Відстань між циклами:

$$1\Big/\frac{d}{q} = \frac{q}{d} = \frac{100}{1500} = \frac{1}{15} = 300 \cdot \frac{1}{15} = 20 \text{ робочих днів.}$$

Приклад 8.6. Визначимо, як зміняться витрати в прикладі 8.5, якщо річний попит ***d=1400*** одиниць, вартість постачання партії продукції C_d***=160*** грн/партію, витрати на зберігання одиниці продукції ***s=50*** грн/рік.

Розв'язання:

Новий оптимальний розмір замовлення:

$$q = \sqrt{\frac{2C_d d}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 160 \cdot 1400}{50}} = 95 \text{ одиниць.}$$

Витрати $L = \frac{C_d d}{q} + \frac{sq}{2} = \frac{160 \cdot 1400}{95} + \frac{50 \cdot 95}{2} = 4732{,}89$ грн/рік.

Витрати збільшились на $\boldsymbol{4732{,}89-4500=232{,}89}$ грн/рік

Приклад 8.7. Річний попит $\boldsymbol{d=14800}$ одиниць, вартість організації виробничого циклу $\boldsymbol{C_v=100}$ грн/партію, витрати на зберігання одиниці продукції $\boldsymbol{s=8}$ грн/рік.

Розв'язання:

Економічний розмір замовлення:

$$q=\sqrt{\frac{2C_v d}{s}}=\sqrt{\frac{2\cdot 100\cdot 14800}{45}}=608 \text{ одиниць.}$$

Тобто, потрібно виробляти ***608*** одиниць продукції, зупинити все виробництво, реалізувати всю виготовлену продукцію, і потім знову запустити виробництво.

Витрати $L=\dfrac{C_d d}{q}+\dfrac{C_v q}{2}=\dfrac{100\cdot 14800}{100}+\dfrac{8\cdot 608}{2}=4866$ грн/рік.

Кількість циклів становитиме:

$$\frac{d}{q}=\frac{14800}{608}=24{,}3 \text{ замовлень.}$$

Відстань між циклами:

$$1\Big/\frac{d}{q}=\frac{q}{d}=\frac{1}{24{,}3}=0{,}04=15 \text{ робочих днів.}$$

Приклад 8.8. Річний попит $\boldsymbol{d=1000}$ одиниць, вартість постачання партії продукції $\boldsymbol{C_d=40}$ грн/партію, закупівельна ціна $\boldsymbol{C_z=50}$ грн/одиницю, річна вартість зберігання одиниці продукції становить ***25%*** її ціни. Можна отримати знижку ***3%*** у постачальників, якщо обсяг замовлення буде не менше ***200*** одиниць. Чи доцільно використати знижку?

Розв'язання:

Оскільки річна вартість зберігання одиниці продукції складає ***25%*** її ціни, то $\boldsymbol{s=0{,}25\cdot C_d=0{,}25\cdot 50=12{,}5}$ грн/одиницю.

Знайдемо загальні витрати у випадку основної моделі:

$$q=\sqrt{\frac{2C_d d}{s}}=\sqrt{\frac{2\cdot 40\cdot 1000}{12{,}5}}=80 \text{ одиниць.}$$

Витрати

$$L = C_z d + \frac{C_d d}{q} + \frac{sq}{2} = 50 \cdot 1000 + \frac{40 \cdot 1000}{80} + \frac{12{,}5 \cdot 80}{2} = 51000 \text{ грн/рік.}$$

Якщо скористатися знижкою, то нова закупівельна ціна становить:

$C_z = 0{,}97 \cdot 50 = 48{,}5$ грн/одиницю.

Тому $s = 0{,}25 \cdot C_d = 0{,}25 \cdot 48{,}5 = 12{,}125$ грн/одиницю.

В цьому випадку оптимальний розмір партії становить:

$$q = \sqrt{\frac{2C_d d}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 1000}{12{,}125}} = 81 \text{ одиниця.}$$

Але знижка надається, якщо обсяг замовлення $q \geq 200$. Тому покладемо $q = 200$:

Тоді загальні витрати становлять:

$$L = C_z d + \frac{C_d d}{q} + \frac{sq}{2} = 48{,}5 \cdot 1000 + \frac{40 \cdot 1000}{200} + \frac{12{,}5 \cdot 200}{2} = 49912{,}5$$

грн/рік.

Отже, загальні витрати зменшились. Тому доцільно скористатися знижкою, замовляючи кожного разу ***200*** одиниць.

Кількість циклів за рік становитиме:

$$\frac{d}{q} = \frac{1000}{200} = 5 \text{ замовлень.}$$

Відстань між циклами:

$$1 \Big/ \frac{d}{q} = \frac{q}{d} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 73 \text{ робочих дні.}$$

Приклад 8.9. Підприємство випускає електричні ножі. Воно може виробляти в середньому ***150*** ножів/день. Попит – ***40*** ножів/день. Річні витрати на зберігання одиниці продукції $s=8$ грн/нож. вартість організації виробничого циклу $C_v = 100$ грн. Знайдемо економічний розмір замовлення, витрати, кількість циклів в рік, відстань між циклами.

Розв'язання:

$p = 150$ ножів/день$=54750$ ножів/рік,

$k = 40$ ножів/день$=14600$ ножів/рік.

Економічний розмір партії замовлення:

$$q=\sqrt{\frac{2C_v d}{s}}\cdot\sqrt{\frac{p}{p-d}}=\sqrt{\frac{2\cdot 100\cdot 14600}{8}}\cdot\sqrt{\frac{54750}{54750-14600}}=705$$

одиниць.

Витрати

$$L=\frac{C_d d}{q}+\frac{s(p-k)q}{2p}=$$

$$=\frac{100\cdot 14600}{705}+\frac{8\cdot(54750-14600)\cdot 705}{2\cdot 54750}=4138{,}92.$$

Тобто, потрібно виробляти ***705*** одиниць продукції, потім зупинити все виробництво. Ножі реалізуються одразу, не чекаючи зупинки виробництва. Як тільки ножі закінчаться, виробничий процес знову запускають.

Кількість циклів становитиме:

$\frac{d}{q}=\frac{14600}{705}=20{,}7$ замовлень.

Інтервал між циклами:

$1\Big/\frac{d}{q}=\frac{q}{d}=\frac{1}{20{,}7}=0{,}048\ \ \text{року}=18$ робочих днів.

Приклад 8.10. Річний попит ***d=600*** одиниць, вартість постачання партії продукції $C_d=40$ грн/партію, витрати на зберігання одиниці продукції ***s=5*** грн/рік, річна вартість відсутності продукції в запасі $C_b=100$ грн/од.

Розв’язання:

Порівняємо дві моделі: основну і з дефіцитом (замовлення не виконуються).

Основна модель:

Оптимальний розмір замовлення:

$q=\sqrt{\frac{2C_d d}{s}}=\sqrt{\frac{2\cdot 40\cdot 500}{5}}=89$ одиниць.

Витрати $L=\frac{C_d d}{q}+\frac{sq}{2}=\frac{40\cdot 500}{89}+\frac{5\cdot 89}{2}=447$ грн/рік.

Модель з дефіцитом:

Оптимальний розмір замовлення:

$$q = \sqrt{\frac{2C_d d}{s} \cdot \sqrt{\frac{C_b}{s + C_b}}} = 89\sqrt{\frac{100}{100 + 5}} = 87 \text{ одиниць.}$$

$$b = \sqrt{\frac{2C_d d}{s}} \cdot \sqrt{\frac{C_b}{s + C_b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 500}{100}} \cdot \sqrt{\frac{5}{5 + 100}} = 4 \text{ одиниці.}$$

Витрати

$$L = \frac{C_d d}{q + b} + \frac{sq^2}{2(q + b)} + \frac{C_b b^2}{2(q + b)} =$$

$$= \frac{40 \cdot 500}{87 + 4} + \frac{5 \cdot 87^2}{2(87 + 4)} + \frac{100 \cdot 4^2}{2(87 + 4)} = 437.$$

Отже, в моделі з дефіцитом річні витрати менші.

Приклад 8.11. Річний попит ***d=3000*** одиниць, вартість постачання партії продукції $C_d = 25$ грн/партію, витрати на зберігання одиниці продукції $s = 120$ грн/рік, річна вартість відсутності продукції в запасі $C_b = 225$ грн/од. Модель з дефіцитом (заявки виконуються).

Розв'язання:

Знайдемо витрати:

$$q = \sqrt{\frac{2C_d d}{s} \cdot \sqrt{\frac{s + C_b}{C_b}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 3000}{120}} \cdot \sqrt{\frac{120}{120 + 225}} = 44 \text{ одиниці.}$$

$$b = \sqrt{\frac{2C_d d}{s}} \cdot \sqrt{\frac{C_b}{s + C_b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 3000}{225}} \cdot \sqrt{\frac{120}{120 + 225}} = 15 \text{ одиниць.}$$

Витрати

$$L = \frac{C_d d}{q + b} + \frac{s(q - b)^2}{2q} + \frac{C_b b^2}{2q} =$$

$$= \frac{25 \cdot 3000}{44} + \frac{120 \cdot (44 - 15)^2}{2 \cdot 44} + \frac{225 \cdot 15^2}{2 \cdot 44} = 3427.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

Задача 8.1. Знайти оптимальний розподіл ***60*** млрд грн між трьома підприємствами. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір капітало-вкладень, млрд грн	***Прибуток по підприємствах, млрд грн***		
	I	II	III
10	8,35	8,7	8,05
20	8,55	9,2	8,75
30	9,1	9,85	9,3
40	10,25	10,45	10,4
50	10,7	11,35	10,7
60	11,65	11,75	11,25

Задача 8.2. Знайти оптимальний розподіл 6 млн грн між трьома проектами. Очікуваний прибуток від реалізації проектів у результаті відповідних інвестицій подано в таблиці:

Розмір інвестицій, млн грн	***Прибуток по підприємствах, млн грн***		
	Проект I	Проект II	Проект III
0	0	0	0
1	1,4	0,1	0,7
2	2,4	1,5	1,1
3	3,7	2,6	2,2
4	4,9	4,8	4,5
5	6,7	5,4	5,4
6	7,5	6,5	7,3

Задача 8.3. Знайти оптимальний розподіл 600 тис. грн між трьома підприємствами галузі. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір капітало-вкладень, тис. грн	*Прибуток по підприємствах, тис. грн*		
	I	II	III
100	16,8	15,4	14,2
200	18,8	16,2	17
300	21,4	18,4	19,2
400	23,8	23	23,6
500	27,4	24,8	24,8
600	29	28,6	27

Задача 8.4. В таблиці вказаний можливий приріст випуску продукції (в тис. грн) на чотирьох фірмах при здійсненні додаткових капіталовкладень на їх реконструкцію і модернізацію.

Капіталовкладення, тис. грн	*Приріст випуску продукції, тис. грн*			
	I	II	III	IV
0	0	0	0	0
50	7,5	8	8,6	7,8
100	11	12	11,4	10,6
150	15	14	14,5	16
200	19	17,2	18	19,2

Потрібно так розподілити 200 тис. грн між чотирма фірмами, щоб одержати максимальний загальний приріст випуску продукції.

Задача 8.5. В таблиці вказаний можливий приріст випуску продукції (в тис. грн) на чотирьох фірмах при здійсненні додаткових капіталовкладень на їх реконструкцію і модернізацію.

Капіталовкладення, тис. грн	*Приріст випуску продукції, тис. грн*			
	I	II	III	IV
50	4	3,5	3,8	3,7
100	5	6	5,4	5,8
150	7	6,5	6,8	7,5
200	9	8,6	8,5	9,1

Потрібно так розподілити 200 тис. грн між чотирма фірмами, щоб одержати максимальний загальний приріст випуску продукції.

Задача 8.6. В таблиці вказаний можливий приріст випуску продукції (в тис. грн) на чотирьох підприємствах при здійсненні додаткових капіталовкладень на їх реконструкцію і модернізацію.

Капіталовкладення, тис. грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***			
	A	B	C	D
0	0	0	0	0
50	2	3	3,2	2,6
100	8	9	8,8	8,2
150	13	14	15	14
200	18	18,4	19	18,4

Потрібно так розподілити 200 тис. грн між чотирма підприємствами, щоб одержати максимальний випуск продукції.

Задача 8.7. Заданий можливий приріст випуску продукції (в тис. грн) на трьох філіях підприємства при здійсненні додаткових капіталовкладень на їх реконструкцію і модернізацію.

Капіталовкладення, тис. грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***		
	I	II	III
10	8	5	11
20	17	14	16
30	23	24	22
40	30	31	29
50	34	35	32

Визначити, як розподілити 50 тис. грн між трьома філіями, щоб одержати максимальний загальний приріст випуску продукції.

Задача 8.8. Відомо очікуваний приріст випуску продукції (в тис. грн) на трьох підприємствах при здійсненні додаткових капіталовкладень на їх реконструкцію і модернізацію.

Капіталовкладення, тис. грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***		
	I	II	III
0	0	0	0
10	9,5	8	11
20	14	12,5	13,5
30	17	17,5	16,5
40	20,5	21	20
50	22,5	23	21,5

Потрібно так розподілити 50 тис. грн між трьома підприємствами, щоб одержати максимальний загальний приріст випуску продукції.

Задача 8.9. Заданий можливий приріст випуску продукції (в тис. грн) на трьох фірмах при здійсненні додаткових інвестицій.

Інвестиції, тис. грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***		
	I	II	III
10	13	11,8	14,2
20	16,6	15,4	16,2
30	19	19,4	18,6
40	21,8	22,2	21,4
50	23,4	23,8	22,6

Визначити, як розподілити 50 тис. грн між трьома фірмами, щоб одержати максимальний загальний приріст випуску продукції.

Задача 8.10. Знайти оптимальний розподіл 5 млн грн між трьома підприємствами. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір капітало-вкладень, млн грн	*Прибуток по підприємствах, млн грн*		
	I	II	III
1	0,5	0,3	0,7
2	1	3	1,2
3	4	4	4,3
4	5	5,2	5,5
5	7	6	6,8

Задача 8.11. Знайти оптимальний розподіл 5 млн грн між трьома фірмами. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожну із фірм, дано в таблиці:

Розмір капітало-вкладень, млн грн	*Прибуток по фірмах, млн грн*		
	I	II	III
1	6	5,92	6,08
2	6,2	7	6,28
3	7,4	7,4	7,52
4	7,8	7,88	8
5	8,6	8,2	8,52

Задача 8.12. Знайти оптимальний розподіл 5 млн грн між трьома підприємствами. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір капіталовкладень, млн грн	*Прибуток по підприємствах, млн грн*		
	I	II	III
1	7,5	6,1	8,9
2	11	25	12,4
3	32	32	34,1
4	39	40,4	42,5
5	53	46	51,6

Задача 8.13. Фірма має можливість інвестувати 400 тис. грн на розвиток трьох малих підприємств. В таблиці вказаний можливий приріст випуску продукції (в тис. грн) на кожному з трьох підприємств при здійсненні додаткових капіталовкладень.

Розмір інвестицій, млн грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***		
	I	II	III
100	3,0	4,4	5,0
200	5,0	6,6	6,0
300	6,3	7,3	6,7
400	7,2	8,7	8,0

Потрібно так розподілити 400 тис. грн інвестицій між трьома підприємствами, щоб максимізувати загальний приріст випуску продукції.

Задача 8.14. Знайти оптимальний розподіл 7 млн грн між трьома підприємствами корпорації. Прибуток, який можна одержати від інвестування певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір інвестицій, млн грн	***Прибуток по підприємствах, млн грн***		
	I	II	III
1	0,2	0,3	0,3
2	0,4	0,5	0,4
4	0,6	0,6	0,7
5	0,7	0,8	0,8
7	0,8	0,9	0,9

Задача 8.15. Знайти оптимальний розподіл 14 млн. грн. між трьома підприємствами галузі. Прибуток, який можна одержати від інвестування певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір інвестицій, млн. грн.	***Прибуток по підприємствах, млн. грн.***		
	I	***II***	***III***
3	0,34	0,46	0,76
7	1	1,3	1,3
9	1,75	1,84	1,96
14	2,23	2,29	2,26

Задача 8.16. Відомо очікуваний прибуток при здійсненні додаткових інвестицій у три підприємства.

Інвестиції, тис. грн	***Приріст випуску продукції, тис. грн***		
	I	II	III
10	3	2,8	3,2
30	10	10,4	10,5
40	12,4	12,6	12,8
50	15,8	16,2	15,4
80	23,4	24,8	23,9

Визначити, як розподілити 80 тис. грн між трьома фірмами, щоб одержати максимальний прибуток.

Задача 8.17. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на трьох підприємствах, виділяючи для цього 10 млн грн. Для кожного з підприємств розроблено інвестиційний проект із зазначенням прогнозованих сумарних витрат C та доходів D, що пов'язані з його реалізацією. Розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Проект	***Підприємство***					
	I		***II***		***III***	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	6	12	7	9
3	4	8	7	14	8	10
4	5	11	9	18	10	14

Задача 8.18. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на трьох підприємствах, виділяючи для цього 1 млн грн. Для кожного з підприємств розроблено інвестиційний проект із зазначенням прогнозованих сумарних витрат C (у тис. грн) та очікуваних прибутків P (у тис. грн), що пов'язані з його реалізацією. Розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Проект	***Підприємство***					
	I		***II***		***III***	
	C_1	P_1	C_2	P_2	C_3	P_3
1	100	8	200	17	100	9
2	300	25	400	35	300	26
3	500	44	600	50	500	45
4	700	60	800	70	700	58
5	900	75	1000	83	800	67

Задача 8.19. Знайти оптимальний розподіл 7 млн грн між трьома підприємствами корпорації. Прибуток, який можна одержати від інвестування певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір інвестицій, млн грн	***Прибуток по підприємствах, млн грн***		
	I	***II***	***III***
1	0,2	0,3	0,3
2	0,4	0,5	0,4
4	0,6	0,6	0,7
5	0,7	0,8	0,8
7	0,8	0,9	0,9

Задача 8.20. Знайти оптимальний розподіл 14 млн. грн. між трьома підприємствами галузі. Прибуток, який можна одержати від інвестування певного розміру в кожне з підприємств, дано в таблиці:

Розмір інвестицій, млн грн	***Прибуток по підприємствах, млн грн***		
	I	***II***	***III***
3	0,34	0,46	0,76
7	1	1,3	1,3
9	1,75	1,84	1,96
14	2,23	2,29	2,26

Задача 8.21. 4-тонний автомобіль завантажують товарами трьох видів. Вага $\boldsymbol{W_i}$ і прибуток від перевезення одного товару $\boldsymbol{P_i}$ подано в таблиці. Як необхідно завантажити автомобіль, щоб отримати максимальний прибуток?

	Вага, т (W_i)	***Прибуток, тис грн (P_i)***
1	1	28
2	2	62
3	3	93

Задача 8.22. На пароплав, вантажопідйомністю *5* т, треба навантажити *7* видів неподільних предметів. Вага $\boldsymbol{W_i}$ і вартість $\boldsymbol{V_i}$ кожного предмета подано в таблиці. Необхідно завантажити пароплав вантажем, загальна вартість якого була б максимальною, так, щоб він не потонув.

	Вага, кг (W_i)	***Вартість, тис грн (V_i)***
1	270	55
2	290	60
3	340	65
4	380	75
5	420	90
6	450	95
7	560	105

Задача 8.23. Літак, вантажопідйомністю *150 т*, можна завантажити *5* видами неподільних предметів, вага $\boldsymbol{W_i}$ і вартість $\boldsymbol{V_i}$

яких подано в таблиці. Яким чином завантажити літак, щоб забезпечити максимальну загальну вартість вантажу?

	Вага, т (W_i)	***Вартість, тис грн*** (V_i)
1	12	60
2	16	82
3	25	127
4	40	204
5	53	260

Задача 8.24. Розв'язати наступну задачу, використовуючи рекурентні співвідношення.

$$max\ 2x_1^2 + 5x_1 + 7\sqrt{x_2} + 0{,}8x_3^3,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad x_j - цілі, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Задача 8.25. Розв'язати наступну задачу, використовуючи метод динамічного програмування.

$$max\ (x_1 + 1)^2 + 3x_2x_3 + 5x_4,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad x_j - цілі, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Задача 8.26. Розв'язати наступну задачу, використовуючи метод динамічного програмування.

$$min\ 4x_1 + 7x_2 + x_3^2 + x_4^3 + \sqrt{x_1x_2},$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad x_j - цілі, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Задача 8.27. Підприємство закупило обладнання, яке може експлуатуватися упродовж п'яти років, після чого продається. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну обладнання або про його подальшу експлуатацію. Вартість нового обладнання ***40 000*** грн. Після t років експлуатації може бути продано за $q(t)=\dfrac{P}{2^t}$ грн. Затрати на утримання обладнання упродовж року залежать від його віку і становлять ***6000(t+1)***. Визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання за умови мінімізації витрат з урахуванням початкової купівлі та кінцевого продажу.

Задача 8.27. Підприємство розробляє план оновлення обладнання на наступні 5 років. На момент розробки плану на підприємстві функціонує виробнича лінія віком 2 роки, яку потрібно обов’язково замінювати після 6 років роботи. Вартість нової виробничої лінії – 1 млн грн. Основні характеристики експлуатації виробничої лінії наведено в таблиці.

Вік виробничої лінії, роки	***Прибуток, тис. грн***	***Вартість обслуговування, тис. грн***	***Залишкова вартість, тис. грн***
0	400	5	–
1	380	13	800
2	370	25	600
3	350	30	500
4	310	35	300
5	280	38	100
6	250	44	50

Задача 8.28. Потреби фірми в деякій однорідній продукції протягом п’яти періодів, відповідно, $d_1=100;\ d_2=140;\ d_3=150;$ $d_4=120;\ d_5=180$ одиниць продукції.

Для перевезення цієї продукції використовують одну машину вантажопідйомністю ***300*** одиниць продукції. Вартість перевезення в кожному рейсі $500+0{,}3\cdot x$, де x – кількість продукції, яку перевозять.

Необхідно, щоб потреби виробництва в кожному періоді були повністю задоволені. Якщо частина продукції залишається на наступний період, то для її зберігання можна використати склад, що вміщує ***160*** одиниць продукції. Вартість зберігання однієї одиниці продукції протягом одного періоду дорівнює $\boldsymbol{3{,}2 \cdot v}$ (де $\boldsymbol{v}$ – кількість продукції, яку зберігають). Початковий запас продукції на складі рівний нулю ($\boldsymbol{v_0 = 0}$).

Визначити, яку кількість продукції треба перевозити в кожен період, щоб мінімізувати сумарні затрати на перевезення і зберігання цієї продукції.

Задача 8.30. Підприємство виробляє сезонну продукцію, попит на яку відчутно коливається упродовж року. Дані про обсяги попиту (у кількості одиниць продукції) за останні п'ять років наведено в наступній таблиці[1]:

Місяць	***Рік***				
	1	***2***	***3***	***4***	***5***
Січень	10+N	11+3N	10+2N	12+2N	11+N
Лютий	50+2N	52+N	60+N	50+N	55+2N
Березень	8+3N	10+N	9+2N	15+N	10+N
Квітень	99+N	100+2N	105+3N	110+3N	120+3N
Травень	120+2N	100+N	110+N	115+N	110+N
Червень	100+3N	105+3N	103+3N	90+3N	100+N
Липень	130+N	129+N	125+N	130+2N	130+2N
Серпень	70+2N	80+2N	75+2N	75+N	78+N
Вересень	50+N	52+3N	55+3N	54+2N	51+3N
Жовтень	120+2N	130+N	140+N	160+3N	180+N
Листопад	210+2N	230+2N	250+N	280+N	300+2N
Грудень	40+N	46+3N	42+2N	41+2N	43+N

Беручи до уваги коливання попиту на продукцію, менеджер з управління запасами обрав стратегію, відповідно до якої замовлення на продукцію розміщуються поквартально: 1 січня, 1 квітня, 1 липня і 1 жовтня. При цьому обсяг замовлення покриває обсяг попиту відповідного кварталу. Термін між розміщенням замовлення і його отриманням становить 3 місяці. Оцінки обсягу попиту на поточний рік

[1] *N* – параметр, який обирає кожен студент окремо. *N* може відповідати номеру студента у списку в журналі групи.

Задача 8.31. Річний попит ***d=1500*** одиниць, вартість постачання партії продукції ***Cd =150*** грн/партію, витрати на зберігання одиниці продукції ***s=45*** грн/рік, тривалість постачання ***6*** днів, ***1*** рік=***300*** робочих днів.

Знайти оптимальний розмір замовлення, витати, рівень повторного замовлення.

Задача 8.32. Річний попит ***d=14800*** одиниць, вартість організації виробничого циклу ***Cv =100*** грн/партію, витрати на зберігання одиниці продукції ***s=8*** грн/рік. Знайти економічний розмір замовлення, витати, кількість циклів, відстань між циклами.

Задача 8.33. Річний попит ***d=1000*** одиниць, вартість постачання партії продукції ***Cd=40*** грн/партію, закупівельна ціна ***Cz=50*** грн/одиницю, річна вартість зберігання одиниці продукції становить ***25%*** її ціни. Можна отримати знижку ***3***% у постачальників, якщо обсяг замовлення буде не менше ***200*** одиниць. Чи доцільно використати знижку?

Задача 8.34. Підприємство випускає електричні ножі. Воно може виробляти в середньому ***150*** ножів/день. Попит – ***40*** ножів/день. Річні витрати на зберігання одиниці продукції ***s=8*** грн./нож. вартість організації виробничого циклу ***Cv =100*** грн. Знайти економічний розмір замовлення, витрати, кількість циклів в рік, відстань між циклами.

Контрольні питання

1. Дайте визначення понять: конфліктна ситуація, теорія ігор.
2. Дайте визначення понять: гра, гравець, виграш, нічия.
3. Дайте визначення понять: правила гри, партія гри, хід гри, особистий хід, випадковий хід.
4. Дайте визначення понять: скінченна гра, нескінченна гра, стратегія, оптимальна стратегія, азартна гра, стратегічна гра.
5. Дайте визначення понять: гра з нульовою сумою, парна гра, антагоністична гра.
6. Дайте визначення понять: нижня ціна гри, верхня ціна гри.
7. Дайте визначення понять: сідлова точка, чиста стратегія, змішана стратегія.
8. В чому суть „принципу мінімаксу”?
9. Назвіть основні складові конфлікту.
10. Яка мета та завдання теорії ігор?
11. Опишіть історію розвитку теорії ігор.
12. Хто із вчених отримав Нобелівську премію за дослідження конфліктних ситуацій та теорії ігор.
13. Дайте характеристику платіжної матриці.
14. Назвіть умови застосування змішаних стратегій.
15. Сформулюйте основні властивості оптимальних змішаних стратегій.
16. Сформулюйте та доведіть теорему про необхідні і достатні умови оптимальності змішаних стратегій.
17. Сформулюйте та доведіть теорему активні стратегії учасника гри.
18. Сформулюйте та доведіть теорему зв’язок між оптимальними стратегіями, ціною гри матриць $\left\| a_{ij} \right\|_{m\times n}$ та $\left\| ba_{ij} + c \right\|_{m\times n}$ $(b>0)$.
19. Які стратегії називаються домінуючими для гравця ***A***?
20. Які стратегії називаються домінуючими для гравця ***B***?
21. Які стратегії називаються дублюючими?
22. Сформулюйте алгоритм розв’язку матричної гри типу ***2xn*** графічним методом.
23. Сформулюйте алгоритм розв’язку матричної гри типу ***mx2*** графічним методом.
24. Які стратегії називаються змішаними?
25. Що таке оптимальні змішані стратегії матричної гри.
26. Вкажіть методи знаходження оптимальних змішаних стратегій.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акимов В.П. Основы теории игр / В.П. Акимов – М. : МГИМО, 2008. – 156 с.
2. Акулич И.А. Математическое програмирование в примерах и задачах: Учеб. пос. для студ. эконом. спец. / И.А. Акулич – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.
3. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці. Навч. пос. / О.В. Боровик, Л.В. Боровик – К. : ЦУЛ, 2007. – 424 с.
4. Вітлінський В.В. Математичне програмування – Навчально-методичний посібник для самост. вивч. дисц. / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О.Терещенко – вид. 2-ге без змін – Київ : КНЕУ, 2006. – 248 с.
5. Дацко М.В. Дослідження операцій. Навч. пос. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів : “ПАЇС”, 2009. – 288 с.
6. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Ю.П. Зайченко – Київ : ЗАТ “Віпол”, 2000. – 688 с.
7. Исследование операций в экономике: Учебное пособие / Под ред. Н.Ш. Кремера – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001. – 407 с.
8. Исследование операций: в 2 т. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – Т. 1: Методологические основы и математические методы. – 1981. – 716 с.
9. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому програмированию / И.Л. Калихман – М. : Высшая школа, 1986. – 270 с.
10. Карагодова О.О. Дослідження операцій: Навч. пос. / О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок – К. : ЦУЛ, 2007. – 256 с.
11. Карбовник М.М. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу “Дослідження операцій” / М.М. Карбовник, М.В. Негрей – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 45 с.
12. Катренко А.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник / А.В. Катренко – Львів : “Магнолія-2006”, 2007. – 480 с.
13. Крушевский А.В. Теория игр / А.В. Крушевский – К. : Вища школа, 1977. – 216 с.
14. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник / В.Я. Кутковецький – Київ : Вид-во ТОВ “Видавничий дім “Професіонал”, 2004. – 350с.

15. Максишко Н.К. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / Н. К. Максишко, М.В. Негрей. – Київ: Компринт, 2015. – 336 с.
16. Математичне програмування: [Навч. пос.] / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак, В.М. Сороківський – Львів : “Новий світ-2000”, 2006. – 216 с.
17. Математичні методи дослідження операцій: [Навч. пос.] / В.П. Лавренчук, М.І. Букатар, Т.І. Готинчан, Г.С. Пасічник – Чернівці : Рута, 2005. – 360 с.
18. Математичні моделі в менеджменті та маркетингу: Навч. посібник / [С.К. Рамазанов, Н.О. Рязанцева, Т.В. Ляшенко та ін.] – Луганськ : СПД Резніков В.С., 2010. – 311 с.
19. Машина Н.І. Математичні методи в економіці: Навч. пос. / Н.І. Машина – К. : Центр навч. л-ри, 2003. – 148с.
20. Наконечний С.І. Математичне програмування: Навч. посіб. / С.І. Наконечний, С.С. Савіна – К. : КНЕУ, 2003. – 452с.
21. Негрей М.В. Дослідження операцій. Частина I: навч.-метод. посібник / М. В. Негрей, З. Б. Артим-Дрогомирецька, / Львів: вид-во «Край», 2014. – 312 с.
22. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций / Хэмди А. Таха – М. : Мир, 2005. – 912с.
23. Терехов Л.Л. Економіко-математичні методи і моделі. Навч. посібник / Л.Л. Терехов – К. : ВПД “Формат”, 2008. – 292 с.
24. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. Підручник для студ. вузів / О.В. Ульянченко – Харків : Гриф, 2002. – 580 с.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акимов В.П. Основы теории игр / В.П. Акимов – М. : МГИМО, 2008. – 156 с.
2. Акулич И.А. Математическое програмирование в примерах и задачах: Учеб. пос. для студ. эконом. спец. / И.А. Акулич – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.
3. Артим-Дрогомирецька З.Б. Економічний ризик: навч.-метод. посібник / З. Б. Артим-Дрогомирецька, М. В. Негрей / Львів: Магнолія-2006, 2013. – 320 с.
4. Баранкевич М.М. Експертні методи в ухваленні рішень: Текст лекцій / М.М. Баранкевич – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. – 214 с.
5. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці. Навч. пос. / О.В. Боровик, Л.В. Боровик – К. : ЦУЛ, 2007. – 424 с.
6. Варфоламеев В. И. Принятие управленческих решений: учеб. пособ. для вузов. / В. И. Варфоламеев, С. Н. Воробьёв. - М. : КУДИЦОБРАЗ, 2001. - 288 с.
7. Василенко В. А. Теорія і практика розробки управлінських рішень: навч. посіб. / В. А. Василенко. - К. : ЦНЛ, 2002. - 420 с.
8. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: Учеб. пособие для вузов / Е.С. Венцтель – 3-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2004. – 208 с.
9. Вітлінський В.В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
10. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику / В.В. Вітлінський – К.: Деміур, 1996. – 212 с.
11. Вітлінський В.В. Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, О.Д. Шарапов – К.: ІЗМН, 1996. – 400 с.
12. Вітлінський В.В. Математичне програмування – Навчально-методичний посібник для самост. вивч. дисц. / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О.Терещенко – вид. 2-ге без змін – Київ : КНЕУ, 2006. – 248 с.
13. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посіб. / В.В. Вітлінський – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.
14. Вітлінський В.В. Ризик у менеджменті / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний – К.: ТОВ ”Борисфен-М”, 1996. – 336 с.

15. Вітлінський В.В. Ризикологія в економіці та підприємництві: Монографія / В.В. Вітлінський, Г.І. Великоіваненко – К.: КНЕУ, 2004. – 480 с.
16. Вовк В.М. Інвестиції та їхні оптимізаційні моделі / В.М. Вовк, І.М. Паславська – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – 286 с.
17. Вовк В.М. Основи системного аналізу. Навч. посібник / В.М. Вовк, З.Б. Дрогомирецька – Львів : ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 248 с.
18. Вовчак, І. С. Інформаційні системи та комп’ютерні технології в менеджменті : навчальний посібник / Іван Сільвестрович Вовчак ; Мін-во освіти і науки України, Тернопільський держ. технічний ун-т ім. І. Пулюя. - Тернопіль : Карт-бланш, 2001. - 354 с.
19. Воробьев Н.Н. Основы теории игр: Бескоалиционные игры / Н.Н. Воробьев – М. : Наука. 1984. – 497 с.
20. Воробьев Н.Н. Теория игр: для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьев – М. : Наука, 1985. – 272 с.
21. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях / М.Г. Гафт – М.: Знание, 1979. – 64 с.
22. Грабовецький Б.Є. Методи експертних оцінок: теорія, методологія, напрямки використання : монографія [Електронний ресурс] / Б.Є. Грабовецький // ВНТУ. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: http://hrabovecky.vk.vntu.edu.ua/file/a0a40b7bd74c5d39fe693b7b2c99f38f.pdf.
23. Грабовый П.Г. Риски в современном бизнесе / П.Г. Грабовый, С.Н. Петрова, С.И. Полтавцев – М.: Аланс, 1994. – 240 с.
24. Дацко М.В. Дослідження операцій. Навч. пос. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів : “ПАЇС”, 2009. – 288 с.
25. Донець Л.І. Економічні ризики і методи їх вимірювання: Навчальний посібник / Л.І. Донець – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 312 с.
26. Дюк, В. А. Data Mining - состояние проблемы, новые решения [Електронний ресурс] / В. А. Дюк. - Режим доступу : http://www.inftech. webservis.ru/database/datamining/ ar 1 .html.
27. Економічний ризик: ігрові моделі: [Навч. пос.] / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко, А.В. Сігал, Я.С. Наконечний; за ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.
28. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. / Ю.М. Ермольев – М.: Наука, 1976. – 239 с.

29. Заичкин Н. И. Экономико-математические модели и методы принятия решений в управлении производством: учеб. пособие / Н. И. Заичкин. - М. : Изд. центр ГУУ, 2000. - 107 с.
30. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Ю.П. Зайченко – Київ : ЗАТ “Віпол”, 2000. – 688 с.
31. Исследование операций в экономике: Учебное пособие / Под ред. Н.Ш. Кремера – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001. – 407 с.
32. Исследование операций: в 2 т. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – Т. 1: Методологические основы и математические методы. – 1981. – 716 с.
33. Івченко І.Ю. Економічні ризики: Навчальний посібник [мультимедійний підручник] / І.Ю. Івченко – Київ: «Центр навчальної літератури», 2004. – 304 с.
34. Ілляшенко С.М. Економічний ризик: Навчальний посібник. 2-ге вид., доп. перероб. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 220с.
35. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому програмированию / И.Л. Калихман – М. : Высшая школа, 1986. – 270 с.
36. Камінський А.Б. Моделювання фінансових ризиків: Монографія / А.Б. Камінський – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
37. Карагодова О.О. Дослідження операцій: Навч. пос. / О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок – К. : ЦУЛ, 2007. – 256 с.
38. Карбовник М.М. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу “Дослідження операцій” / М.М. Карбовник, М.В. Негрей – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 45 с.
39. Катренко А.В. Дослідження операцій: Підручник / За наук. ред. В.В. Пасічника. 2-е видання, виправлене та доповнене. – Львів: “Магнолія 2006”, 2007. – 480 с.
40. Кігель В. Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: монографія / В. Р. Кігель. - К. : ЦНЛ, - 202 с.
41. Клименюк М.М. Управління ризиками в економіці: [навч.посіб.] / М. М. Клименюк, І. А. Брижань. – К.: Просвіта, 2000. – 256 с.
42. Колпаков, В. М. Теория и практика принятия управленческих решений: учеб. пособие / В. М. Колпаков. - [изд. 2-е, пере- раб. и доп.]. - К. : МАУП, 2004. - 504 с.
43. Крушевский А.В. Теория игр / А.В. Крушевский – К. : Вища школа, 1977. – 216 с.

44. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник / В.Я. Кутковецький – Київ : Вид-во ТОВ “Видавничий дім “Професіонал”, 2004. – 350с.
45. Литвак Б. Г. Разработка управленческого решения: учебник / Б. Г. Литвак. - М. : Дело, 2000. - 392 с.
46. Максишко Н.К. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / Н. К. Максишко, М.В. Негрей. – Київ: Компринт, 2015. – 336 с.
47. Матвійчук А.В. Економічні ризики в інвестиційній діяльності. Монографія / А.В. Матвійчук – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 205 с.
48. Математичне програмування: [Навч. пос.] / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак, В.М. Сороківський – Львів : “Новий світ-2000”, 2006. – 216 с.
49. Математичні методи дослідження операцій: [Навч. пос.] / В.П. Лавренчук, М.І. Букатар, Т.І. Готинчан, Г.С. Пасічник – Чернівці : Рута, 2005. – 360 с.
50. Математичні моделі в менеджменті та маркетингу: Навч. посібник / [С.К. Рамазанов, Н.О. Рязанцева, Т.В. Ляшенко та ін.] – Луганськ : СПД Резніков В.С., 2010. – 311 с.
51. Матрица результатов на 2016-2017 годы [Електронний ресурс] // FAO. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: http://www.fao.org/3/a-mo850r.pdf.
52. Машина Н.І. Економічний ризик і методи його вимірювання: Навч. посіб. / Н.І. Машина – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188 с.
53. Машина Н.І. Математичні методи в економіці: Навч. пос. / Н.І. Машина – К. : Центр навч. л-ри, 2003. – 148с.
54. Мирзоахмедов Ф. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов [Текст]: монография / Ф.Мирзоахмедов. – Киев: Наукова думка, 1991. – 219 с.
55. Мулен, Эрве. Теория игр с примерами из математической экономики / Эрве Мулен – М. : Мир, 1985. – 192 с.
56. Наконечний С.І. Математичне програмування: Навч. посіб. / С.І. Наконечний, С.С. Савіна – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.
57. Негрей М.В. Дослідження операцій. Частина І: навч.-метод. посібник / М. В. Негрей, З. Б. Артим-Дрогомирецька, / Львів: вид-во «Край», 2014. – 312 с.
58. Негрей М.В. Методичні рекомендації щодо самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни «Системи управління

економічними ризиками» / М.В. Негрей – Львівський банківський інститут НБУ. – Львів. – 2010. – 51 с.

59. Первозванский А.А. Финансовый рынок: расчет и риск / А.А. Первозванский, Т.Н. Первозванская – М.: Инфра, 1994. –192 с.
60. Пушкар О. І. Системи підтримки прийняття рішень: навч. посібник / О. І. Пушкар, В. М. Гіковатий, О. С. Євсєєв, Л. В. Потрашкова ; ред. О. І. Пушкар. - Харків : Інжек, 2006. - 304 с.
61. Райс Т. Финансовые инвестиции и риск [пер. с англ.] / Т. Райс, Б. Койли – К.: Торг.-изд. бюро BHV, 1995. – 592 с.
62. Ситник В. Ф. та ін. Основи інформаційних систем: Навч. посібник. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. —К.: КНЕУ, 2001. — 420 с.
63. Ситник В.Ф., Гордієнко І.В. Системи підтримки прийняття рішень: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К: КНЕУ, 2004. – 427 с.
64. Ситник В.Ф., Краснюк М.Т. Інтелектуальний аналіз даних (дейтамайнінг): Навч. посіб. – К: КНЕУ, 2007. – 376 с.
65. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций / Хэмди А. Таха – М. : Мир, 2005. – 912с.
66. Терехов Л.Л. Економіко-математичні методи і моделі. Навч. посібник / Л.Л. Терехов – К. : ВПД “Формат”, 2008. – 292 с.
67. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. -- К.: Наукова думка, 2002. – 382 с.
68. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. Підручник для студ. вузів / О.В. Ульянченко – Харків : Гриф, 2002. – 580 с.
69. Федоренко І.К. Дослідження операцій в економіці: Підручник / І.К. Федоренко, О.І. Черняк – К. : Знання, 2007. – 558 с.
70. Черноруцкий И Г. Методы принятия решений. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 416 с.
71. Шиян А.А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті. Навчальний посібник / А.А. Шиян. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 164 с.
72. Эддоус, М. Методы принятия решений : учебное пособие / М. Эддоус, Р. Стэнфилд, И. И. Елисеева. - М. : Аудит : ЮНИТИ, 1997. – 590 с.
73. Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику / О.І. Ястремський – К.: Либідь, 1992 – 176 с.
74. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику: Навч. посібник / О.І. Ястремський – К.: ”АртЕк”, 1997. – 248 с.

75. Bardach E. A Practical Guide for Policy Analysis / E. Bardach. CQ Press, an Imprint of SAGE Publications, Inc. CQ Press is a registered trademark of Congressional Quarterly Inc. – 2011. – 171 p.
76. Gogunsky V. D. The coefficient of concordance as an indicator of project evaluation [Електронний ресурс] / V. D. Gogunsky, T. M. Olekh // Conference: Project Management: Status and Prospects VIII International Scientific Conference, At Ukraine, Nikolayev, Volume: 8 – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/283279638_The_coefficient_of_concordance_as_an_indicator_of_project_evaluation.
77. Krupa J. Guidebook to Decision-Making Methods. J.Krupa, K.B. Sorenson. – 2001. – 40 p.
78. Mcnamee P. Decision Analysis for the Professional. P. Mcnamee, J. Celona. - SmartOrg, Inc, 2008. – 342 p.
79. Melkamu M. Investigating Household Common Coping Strategies in Northern Rajasthan using Kendall's Coefficient of Concordance (W) [Електронний ресурс] / M. Melkamu, N. Singh // International Journal in Management and Social Science. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/292616826_Investigating_Household_Common_Coping_Strategies_in_Northern_Rajasthan_using_Kendall%27s_Coefficient_of_Concordance_W.
80. Munier N. A Strategy for Using Multicriteria Analysis in Decision-Making: A Guide for Simple and Complex Environmental Projects / N. Munier. – New York.: Springer, 2011 – 298 p.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

М. В. Негрей, К. Л. Тужик

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку 07.12.2017 р. Формат 60х84 1/16.
Друк лазерний. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 17. Тираж 300 прим.

ТОВ «Центр учбової літератури»
вул. Лаврська, 20 м. Київ

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2458 від 30.03.2006 р.